К. К. Пономарев

СОСТАВЛЕНИЕ и РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

К. К. Пономарев

СОСТАВЛЕНИЕ И РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

ПОСОБИЕ
ДЛЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКУЛЬТЕТОВ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва 1962

ВВЕДЕНИЕ

Перестройка всей системы образования в соответствии с законом «Об укреплении связи школы с жизнью и о дальнейшем развитии системы народного образования в стране» требует улучшения качества преподавания на основе тесной связи с практикой и специальными дисциплинами.

Поставленная задача вызывает необходимость повышения уровня математической подготовки студентов на основе более углубленного изучения курса математического анализа с учетом общеинженерных и специальных дисциплин.

В новых программах физико-математических факультетов педагогических институтов большое внимание уделяется изучению дифференциальных уравнений, требующих не только формального их решения, но и решения прикладных и технических задач, приводящих к составлению дифференциальных уравнений. С дальнейшим развитием политехнического обучения это требование приобретает еще более важное значение.

В приложениях математики к техническим наукам дифференциальные уравнения занимают особо важное место. Многие прикладные процессы с их помощью описываются проще и полнее.

Они дают возможность решать многие вопросы общетехнических и специальных прикладных дисциплин: физики, теоретической механики, сопротивления материалов, гидравлики, теории машин и механизмов, химии, технологии производств, биологии, финансово-экономических дисциплин и др.— и часто сами возникают при решении этих вопросов.

Поэтому вполне понятно то внимание, которое должно быть уделено вопросу составления дифференциальных уравнений.

Однако многочисленные и разнообразные технические приложения теории обыкновенных дифференциальных уравнений требуют в первую очередь знаний различных физико-механических законов. По этой причине в теоретических курсах по дифференциальным уравнениям решению практических инженерно-технических задач уделяется недостаточное внимание, особенно в педагогических институтах. Студенты, прослушавшие курс дифференциальных уравнений, не имеют достаточного навыка и изобретательности в решении задач, выдвигаемых жизнью, производством.

Специальных же учебных пособий по составлению дифференциальных уравнений, охватывающих широко конкретные задачи естествознания и техники, нет.

Настоящее пособие составлено с целью оказать студентам помощь в овладении навыками в составлении и решении дифференциальных уравнений по условиям инженерно-технических задач, возникающих в процессе производства или научной деятельности.

Пособие состоит из двух разделов. В первом разделе помещено 65 задач инженерно-технического характера. По содержанию задачи охватывают ряд научно-технических дисциплин и раскрывают связь дифференциальных уравнений со смежными научными дисциплинами. На примерах этих же задач студенты не только овладевают методами решения дифференциальных уравнений, но и убеждаются в той огромной роли, которую играет высшая математика в естествознании и технике. Эти задачи, кроме того, облегчают изучение ряда важнейших дисциплин, составляющих основу образования специалиста любой отрасли, в том числе и учителя средней школы.

Во втором разделе пособия подобраны задачи для самостоятельного решения, большинство из которых аналогично разобранным задачам первого раздела. Задачи для самостоятельного решения снабжены ответами, а для некоторых из них даны краткие пояснения к решению.

Рассматриваемые задачи разбиты по математическому признаку на три группы: процессы, описываемые дифференциальными уравнениями 1-го порядка, процессы, описываемые уравнениями 2-го порядка, и процессы, описываемые уравнениями 4-го порядка.

Кроме оригинальных задач, в пособии имеются также примеры, заимствованные из различных литературных источников, указанных в списке литературы.

Пособие предназначено для студентов стационарных и заочных педагогических институтов и лиц, самостоятельно изучающих курс дифференциальных уравнений. Оно может быть полезным также преподавателям старших классов средней школы при проведении занятий в математических кружках и студентам высших технических учебных заведений.

I. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Глава 1

ПРОЦЕССЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Методика составления и решения прикладных задач теории обыкновенных дифференциальных уравнений

Составление дифференциального уравнения по условию задачи (механической, физической, химической или технической) состоит в определении математической зависимости между переменными величинами и их приращениями.

В ряде случаев дифференциальное уравнение получается без рассмотрения приращений — за счет их предварительного учета. Например, представляя скорость выражением $v=\frac{ds}{dt}$, мы не привлекаем приращений Δs и Δt, хотя они фактически учтены в силу того, что

$$v=\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Ускорение в какой-нибудь момент времени t выражается зависимостью:

$$j=\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=v\cdot\frac{dv}{ds}.$$

При составлении дифференциальных уравнений приращения сразу же заменяются соответствующими дифференциалами.

Изучение любого процесса сводится:

1) к определению его отдельных моментов;

2) к установлению общего закона его хода.

Отдельный момент процесса (т. н. элементарный процесс) выражается уравнением, связывающим переменные величины процесса с их дифференциалами или производными — дифференциальным уравнением; закон общего хода процесса выражается уравнением, связывающим переменные величины процесса, но уже без дифференциалов этих величин.

Исчерпывающих правил для составления дифференциальных уравнений нет. В большинстве случаев методика решения технических задач с применением теории обыкновенных дифференциальных уравнений сводится к следующему:

1. Подробный разбор условий задачи и составление чертежа, поясняющего ее суть.

2. Составление дифференциального уравнения рассматриваемого процесса.

3. Интегрирование составленного дифференциального уравнения и определение общего решения этого уравнения.

4. Определение частного решения задачи на основании данных начальных условий.

5. Определение, по мере необходимости, вспомогательных параметров (например, коэффициента пропорциональности и др.), используя для этой цели дополнительные условия задачи.

6. Вывод общего закона рассматриваемого процесса и числовое определение искомых величин.

7. Анализ ответа и проверка исходного положения задачи.

Некоторые из этих рекомендаций в зависимости от характера задачи могут отсутствовать.

Как и при составлении алгебраических уравнений, при решении прикладных задач по дифференциальным уравнениям многое зависит от навыков, приобретаемых упражнением. Однако здесь еще в большей степени требуется изобретательность и глубокое понимание сути изучаемых процессов.

§ 1. Уравнения, разрешенные относительно производной

1. Физика (оптика, механика)

Задача 1. *Пусть источник света помещен в точке O. Какова должна быть форма зеркала, чтобы отраженные лучи были параллельны оси Ox?*

Решение

Рассмотрим кривую, получающуюся в сечении поверхности зеркала плоскостью xOy, и на этой кривой — произвольную точку $P(x, y)$ (рис. 1). Угол падения луча равен углу отражения и поэтому $\angle OPQ=\alpha$.

Так как $\angle OQP=\alpha$, то треугольник OPQ — равнобедренный. Таким образом,

$$|OQ|=|OP|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Считая $y>0$, получаем:

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\alpha=\frac{|PR|}{|QR|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}, \tag{1}$$

или, умножая числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{x^2+y^2}-x$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}, \tag{2}$$

или

$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}=1.$$

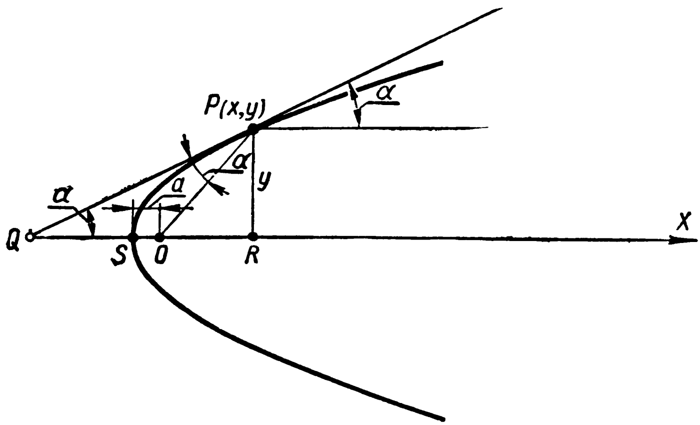

Рис. 1

Другими словами,

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=1$$

и, следовательно, непосредственно проинтегрировав, имеем:

$$\sqrt{x^2+y^2}=x+C,$$

откуда

$$y^2=2Cx+C^2=2C\left(x+\frac{C}{2}\right). \tag{3}$$

По условию задачи, кривая должна быть симметричной относительно оси Ox, т. е. формула (3) будет действительной и для $y<0$. Равенство (3) показывает, что искомая кривая есть парабола, осью которой служит Ox. Пусть дано расстояние от источника света O до центра зеркала S: $|OS|=a$. Тем самым мы получаем начальное условие:

$$y|_{x=-a}=0. \tag{4}$$

Подставляя условие (4) в формулу (3), получим:

$$0=2C\left(-a+\frac{C}{2}\right),$$

откуда

$$C=2a.$$

Значение $C=0$ не подходит по физическому смыслу задачи. Таким образом, искомая парабола имеет уравнение:

$$y^2=4a(x+a).$$

Для этой параболы $p=2a$ и, следовательно, фокусное расстояние $\frac{p}{2}=a$, т. е. источник света O находится в фокусе. Плоскость xOy, в которой лежит парабола $y^2=4a(x+a)$, проходит через ось Ox. Уравнение параболы не изменится, если плоскость xOy будем вращать вокруг оси Ox. Это значит, что поверхностью зеркала будет служить параболоид вращения. Этот параболоид в сечении с любой плоскостью, проходящей через ось Ox, будет давать параболу, уравнение которой нами найдено.

Задача 2. *Материальная точка массы m расположена на кривой AB* (рис. 2), *вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Найти уравнение кривой AB, если материальная точка находится в равновесии в произвольном положении на кривой.*

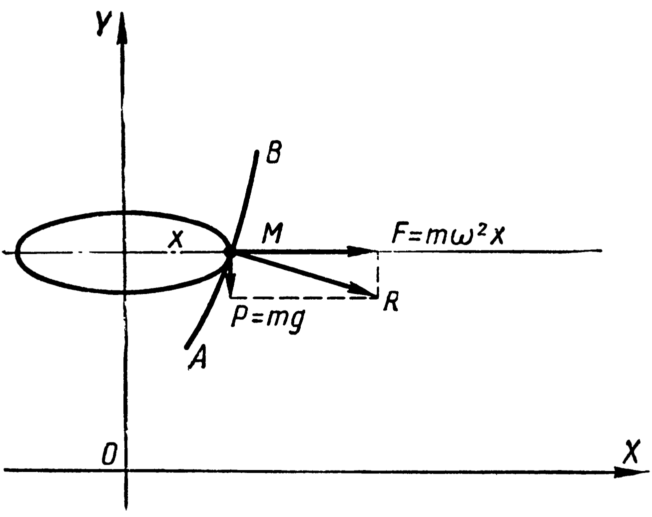

Рис. 2

Решение

В положении равновесия равнодействующая силы тяжести и центробежной силы направлена по нормали к кривой AB, так как реакция связи направлена по нормали. На точку M действуют силы:

1) сила тяжести $P = mg$;
2) центробежная сила $F = m\omega^2 x$.

Здесь m — масса, g — ускорение силы тяжести. Пусть искомое уравнение кривой AB имеет вид $y = y(x)$. Угловой коэффициент нормали к кривой AB равен $-\frac{1}{y'}$; угловой коэффициент равнодействующей равен $-\frac{mg}{m\omega^2 x} = -\frac{g}{\omega^2 x}$. Следовательно,

$$-\frac{1}{y'} = -\frac{g}{\omega^2 x},$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{g} x,$$

$$dy = \frac{\omega^2}{g} x dx.$$

Интегрируя это уравнение, получим семейство парабол:

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C,$$

где C — расстояние между кривыми семейства.

Задача 3. *Точка движется по прямой с постоянным ускорением a. Найти закон движения точки.*

Решение

Если

$$\frac{dv}{dt} = a,$$

то

$$dv = a\,dt. \tag{1}$$

Интегрируя непосредственно уравнение (1), найдем:

$$v = at + C_1. \tag{2}$$

Для определения C_1 положим, что начальная скорость равна v_0, т. е. при $t = 0$ $v = v_0$. Подстановка в (2) дает:

$$v_0 = 0 + C_1, \quad \text{или} \quad C_1 = v_0.$$

Таким образом, уравнение (2) примет вид:

$$v = at + v_0. \tag{3}$$

Так как $v=\frac{ds}{dt}$, то выражение (3) может быть преобразовано к виду:

$$\frac{ds}{dt}=at+v_0,$$

или

$$ds=at\,dt+v_0\,dt. \qquad (4)$$

Интегрируя равенство (4), получим общее решение рассматриваемой задачи:

$$s=\frac{1}{2}at^2+v_0t+C_2. \qquad (5)$$

Для определения C_2 положим, что начальное положение, равное расстоянию при $t=0$, будет s_0, т. е. путь $s=s_0$ при $t=0$. Подстановка этих значений в (5) дает:

$$s_0=0+0+C_2, \quad \text{или} \quad C_2=s_0.$$

Следовательно, уравнение (5) примет вид:

$$s=\frac{1}{2}at^2+v_0t+s_0. \qquad (6)$$

Положив в уравнениях (3) и (6) $a=g$, $v_0=0$, $s_0=0$, $s=h$, найдем закон свободно падающего тела в пустоте:

$$v=gt \quad \text{и} \quad h=\frac{1}{2}gt^2.$$

2. Сопротивление материалов и строительная механика

Задача 4. *Стальная проволока длиной l м с поперечным сечением F растягивается силой, постепенно возрастающей до величины P. Найти работу растяжения.*

Решение

Удлинение проволоки Δl (в метрах) под влиянием растягивающей силы P (в $кГ$) определяется по формуле:

$$\Delta l=k\frac{P}{F}l_0, \qquad (1)$$

где k — коэффициент удлинения,

l_0 — первоначальная длина проволоки (в метрах).

Рассматривая элементарный процесс, получим:

$$dl=\frac{kl_0}{F}dP. \qquad (2)$$

Принимая на бесконечно малом участке удлинения dl силу P постоянной, получим производимую этой силой на рассматриваемом участке работу:

$$dW = P\,dl,$$

или, используя уравнение (2), дифференциальное уравнение процесса:

$$dW = \frac{kl_0}{F} P\,dP. \qquad (3)$$

Интегрируя уравнение (3), получим общее решение:

$$W = \frac{kl_0}{2F} P^2 + C.$$

Для определения C используем начальные данные: при $P=0$, $W=0$:

$$0 = \frac{kl_0}{2F} 0 + C,$$

или

$$C = 0.$$

Таким образом, искомая работа растяжения

$$W = \frac{kl_0}{2F} P^2.$$

Задача 5. *Стальная проволока длиной L м защемлена в одном из концов и под действием своего веса находится в положении равновесия (рис. 3). Определить удлинение проволоки. Объемный вес стали γ $т/м^3$.*

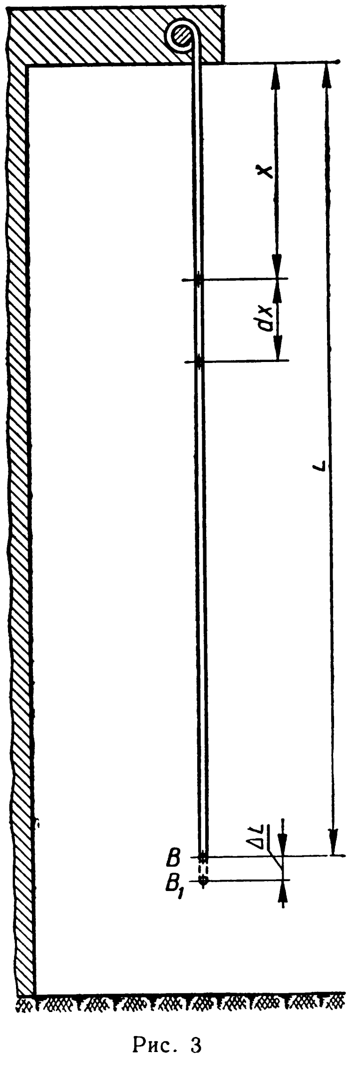

Рис. 3

Решение

Величина натяжения T меняется в зависимости от места сечения. Это натяжение равно весу ниже расположенной части проволоки. Поэтому различные элементы проволоки растягиваются различно. В точке, на расстоянии x от закрепления, элемент dx испытывает натяжение T, определяемое из пропорции

$$\frac{T}{P} = \frac{L - x}{L}, \qquad (1)$$

где P — вес всей проволоки. Из уравнения (1)

$$T=\frac{P}{L}(L-x). \tag{2}$$

Удлинение проволоки Δl (в метрах) под влиянием растягивающей силы T (в *кГ*) будет:

$$\Delta l=k\,\frac{T}{F}\,L, \tag{3}$$

где k — коэффициент удлинения,
F — площадь поперечного сечения, в *см*².
Для растяжения элемента dx имеем:

$$dl=k\frac{T}{F}\,dx,$$

или

$$dl=\frac{kP}{LF}(L-x)\,dx. \tag{4}$$

Но, с другой стороны, $P=\frac{\gamma LF}{1000}$ (в *кГ*), если L измеряем в *см*. Подставляя последнее выражение в уравнение (4), получим дифференциальное уравнение процесса:

$$dl=\frac{k\gamma}{1000}(L-x)\,dx.$$

Интегрируя, получим полное удлинение:

$$l=\frac{k\gamma}{1000}\int\limits_0^L (L-x)\,dx,$$

или

$$l=\frac{k\gamma}{2000}L^2.$$

Задача 6. *Найти кривую, которую образует канат цепного моста.*

Решение

Часть каната AB (рис. 4) находится в равновесии под действием трех сил: горизонтального натяжения H в точке A, натяжения T, направленного вдоль каната в точке B, и веса части моста между точками A и B. Весом каната ввиду его малости пренебрегаем.

Вес части моста между A и B пропорционален длине x и равен kx. На основании фундаментального понятия статики, что сумма проекций всех действующих сил на вертикальную и горизонтальную оси равна нулю, получаем условия равновесия сил — вертикальных:

$$T\sin\varphi=kx, \tag{1}$$

горизонтальных:

$$T \cos \varphi = H. \qquad (2)$$

Разделив уравнение (1) на (2), получаем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k}{H} x.$$

Как известно, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$.

Таким образом, $\frac{dy}{dx} = \frac{k}{H} x$.

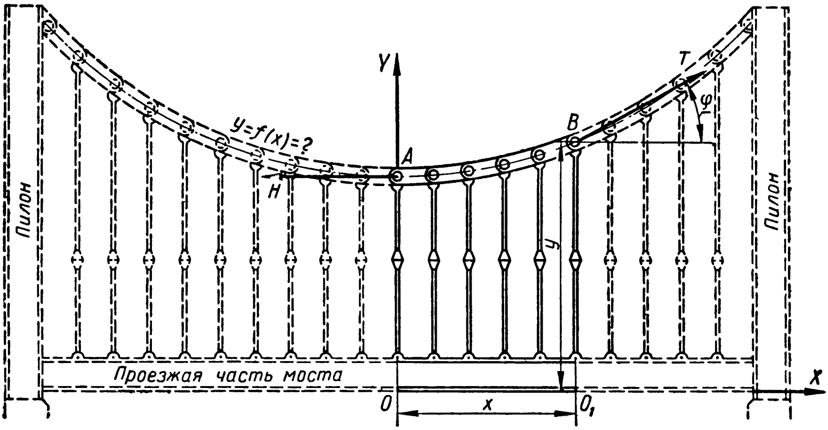

Рис. 4

Интегрируя это элементарное уравнение, получим кривую свешивания каната:

$$y = \frac{k}{2H} x^2 + C. \qquad (3)$$

Уравнение (3) представляет собой семейство парабол.

3. Теплотехника

Задача 7. *В цилиндрическом сосуде объемом* $V_0 = 0,1$ *м*^{3} *заключен атмосферный воздух, который адиабатически (без обмена тепла с окружающей средой) сжимается до объема* $V_1 = 0,01$ *м*^{3}. *Вычислить работу сжатия.*

Решение

При адиабатических изменениях состояния газа его давление и объем связаны уравнением Пуассона:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^k,$$

где k — постоянная для данного газа величина. Для воздуха $k \approx 1{,}4$.

Атмосферное давление $p_0 = 10\,330$ $кГ/м^2$.

Пусть:

S — площадь поршня;

V — объем газа } когда поршень находится на высоте x;
p — давление газа }

$-dx$ — бесконечно малое перемещение (опускание) поршня при сжатии;

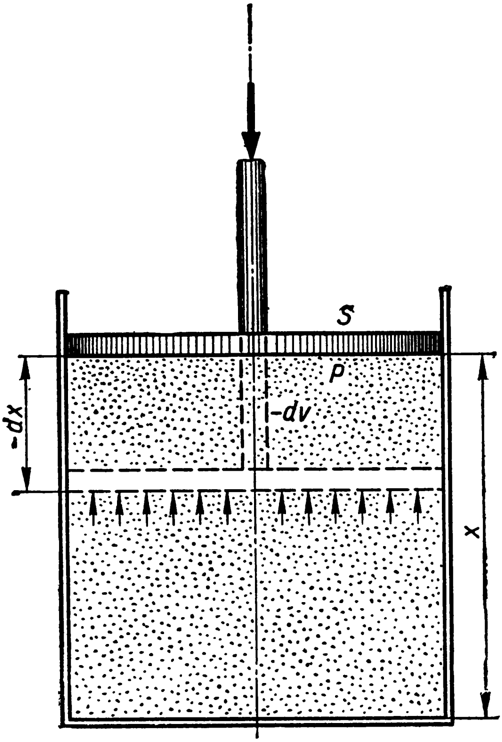

Рис. 5

dW — бесконечно малая работа;

$-dV$ — бесконечно малое изменение объема;

p_0 — первоначальное давление газа;

V_0 — первоначальный объем газа.

Бесконечно малая работа при опускании поршня (рис. 5)

$$dW = -pS\,dx.$$

Но

$$S\,dx = dV.$$

Отсюда следует, что

$$dW = -p\,dV. \quad (1),$$

Из уравнения Пуассона имеем:

$$p = p_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^k = \frac{p_0 V_0^k}{V^k}. \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в уравнение (1), получим дифференциальное уравнение процесса:

$$dW = -p_0 V_0^k \frac{dV}{V^k}.$$

Интегрируя, получим общее решение:

$$W = -p_0 V_0^k \int V^{-k}\,dV = -\frac{p_0 V_0^k}{1-k} V^{1-k} + C =$$

$$= \frac{p_0 V_0^k}{k-1} V^{-(k-1)} + C = \frac{p_0 V_0^k}{(k-1)\,V^{k-1}} + C.$$

Как видно из начальных условий, при $V=V_0$ $W=0$. Отсюда

$$0=\frac{p_0V_0^k}{(k-1)V_0^{k-1}}+C$$

и

$$C=-\frac{p_0V_0}{k-1}.$$

Таким образом, работа адиабатического сжатия будет:

$$W=\frac{p_0V_0}{k-1}\left[\left(\frac{V_0}{V}\right)^{k-1}-1\right].$$

Подставляя числовые данные, получим искомое значение работы:

$$W=\frac{10330\,\frac{кг}{м^2}\,0{,}1\,м^3}{0{,}4}\,[10^{0{,}4}-1]=$$
$$=2582{,}5\,(10^{0{,}4}-1)\ кГм\cong3904{,}4\ кГм.$$

Задача 8. *Водород расширяется при постоянной температуре от своего первоначального объема V_0, имея первоначальное давление p_0, при некотором внешнем давлении, которое бесконечно мало отличается от давления газа. Найти произведенную водородом работу.*

Решение

Аналогично решению задачи 7 получим дифференциальное уравнение процесса:

$$dW=p\,dV.$$

Но в данном случае газ расширяется изотермически и поэтому подчиняется не закону Пуассона, а закону Бойля—Мариотта:

$$pV=p_0V_0,\ \text{откуда}\ \ p=\frac{p_0V_0}{V}.$$

Тогда дифференциальное уравнение процесса примет вид:

$$dW=p_0V_0\,\frac{dV}{V}. \qquad (1)$$

Интегрируя уравнение (1), получим общее решение:

$$W=p_0V_0\ln V+C.$$

Из начальных условий следует, что при $V=V_0$ $W=0$.
Отсюда

$$0=p_0V_0\ln V_0+C$$

и

$$C=-p_0V_0\ln V_0.$$

Таким образом, работа расширения будет:

$$W=p_0V_0\ln\frac{V}{V_0}.$$

§ 2. Уравнения с разделяющимися переменными

1. Физика

Задача 9. *Температура вынутого из печи хлеба в течение 20 мин падает от 100° до 60°* (рис. 6). *Температура воздуха равна 25°. Через сколько времени от момента начала охлаждения температура хлеба понизится до 30°?*

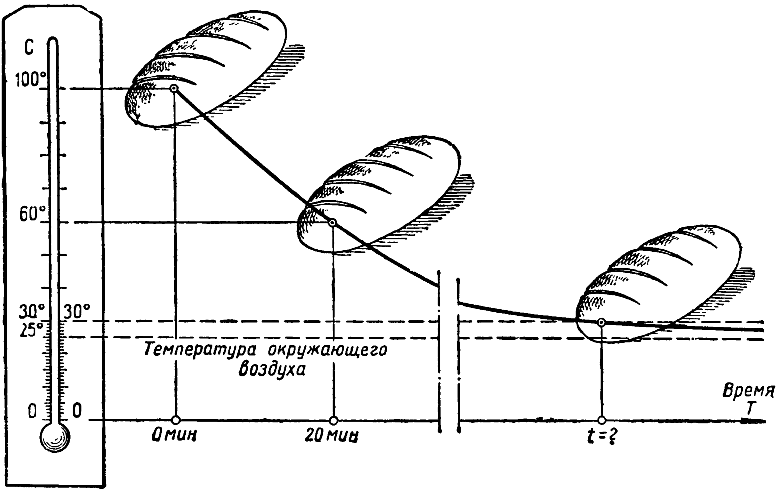

Рис. 6

Решение

В силу закона Ньютона скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Это — процесс неравномерный. С изменением разности температур в течение процесса меняется также и скорость охлаждения тела. Дифференциальное уравнение охлаждения хлеба будет:

$$\frac{dT}{d\tau}=k\,(T-t),$$

где T — температура хлеба;

t — температура окружающего воздуха (в нашем случае 25°);

k — коэффициент пропорциональности;

$\frac{dT}{d\tau}$ — скорость охлаждения хлеба.

Пусть τ — искомое время охлаждения.

Тогда, разделяя переменные, получим:

$$\frac{dT}{T-t}=kd\tau,$$

или для условий данной задачи:

$$\frac{dT}{T-25}=k d\tau.$$

Ввиду того что

$$\frac{dT}{T-25}=\frac{d(T-25)}{T-25},$$

интегрируя, получаем:

$$\int\frac{d(T-25)}{T-25}=k\int d\tau,$$

или

$$\ln(T-25)=k\tau+\ln C.$$

Потенцируя обе части последнего равенства, имеем:

$$e^{\ln(T-25)}=e^{k\tau+\ln C}=e^{k\tau}\cdot e^{\ln C}.$$

Так как

$$e^{\ln N}=N,$$

то окончательно

$$T-25=Ce^{k\tau}. \qquad (1)$$

Произвольную постоянную C определяем из начального условия: при $\tau=0$ *мин*, $T=100°$.

Отсюда

$$100-25=Ce^{k\cdot 0}=C, \text{ или } C=75.$$

Величину e^k определяем, исходя из данного дополнительного условия: при $\tau=20$ *мин*, $T=60°$.

Получаем:

$$60-25=75\,(e^k)^{20}$$

и

$$e^k=\left(\frac{35}{75}\right)^{\frac{1}{20}}=\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

Таким образом, уравнение охлаждения хлеба при условиях нашей задачи примет вид:

$$T=75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{\tau}{20}}+25. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) легко определяем искомое время τ при температуре хлеба $T=30°$:

$$5=75\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{\tau}{20}}, \text{ или } \frac{1}{15}=\left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{\tau}{20}}.$$

Окончательно находим:

$$\tau=\frac{-20\ln 15}{\ln 7-\ln 15}\approx\frac{-20\cdot 2{,}7081}{-0{,}7622}\approx 71 \text{ мин}.$$

Итак, после 1 *часа* 11 *мин* хлеб охлаждается до температуры 30°C.

Задача 10. *Стальная шаровая оболочка с внутренним радиусом 6 см и внешним 10 см находится в стационарном тепловом состоянии. Температура на внутренней ее поверхности равна 200°C, а на внешней 20°C (рис. 7). Найти температуру на расстоянии r от центра и количество теплоты, которое в 1 сек шар отдает наружу (теплопроводность стали $k=0{,}14$).*

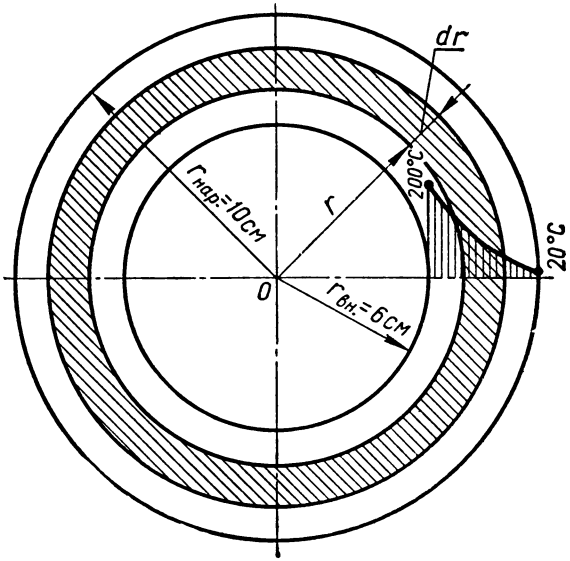

Рис. 7

Решение

На основании симметрии можно считать, что теплота в шаре распространяется радиально. На расстоянии r от центра площадь протекания теплоты равна площади поверхности шара:

$$F=4\pi r^2.$$

Ввиду того что между отдельными сферическими поверхностями количество теплоты остается неизменным, через две любые поверхности протекает одно и то же количество теплоты по закону теплопроводности Фурье. Скорость, с которой теплота распространяется через площадку F, равна:

$$Q=-kF\frac{dT}{dr}, \tag{1}$$

где T — температура тела,

k — теплопроводность вещества.

Уравнение (1) принимает вид:

$$-4\pi kr^2\frac{dT}{dr}=Q=\text{const}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем общее решение задачи:

$$4\pi kT = \frac{Q}{r} + C. \tag{2}$$

Для отыскания частного решения подставляем начальные условия $T=20$, $r=10$; $T=200$, $r=6$ в уравнение (2) и определяем величины C и Q:

$$\left.\begin{aligned} 80\pi k &= \frac{Q}{10} + C, \\ 800\pi k &= \frac{Q}{6} + C. \end{aligned}\right\}$$

Получаем:

$$C = -1000\pi k$$

и

$$Q = 10\,800\pi k.$$

Таким образом, искомая температура на расстоянии r:

$$T = \frac{2700}{r} - 250,$$

а количество теплоты, отдаваемое шаром в течение 1 *сек*:

$$Q = 10\,800\pi k = 4750 \text{ кал}.$$

Задача 11. *Трубопровод тепловой магистрали (диаметр* 20 *см) защищен изоляцией толщиной* 10 *см; величина коэффи-*

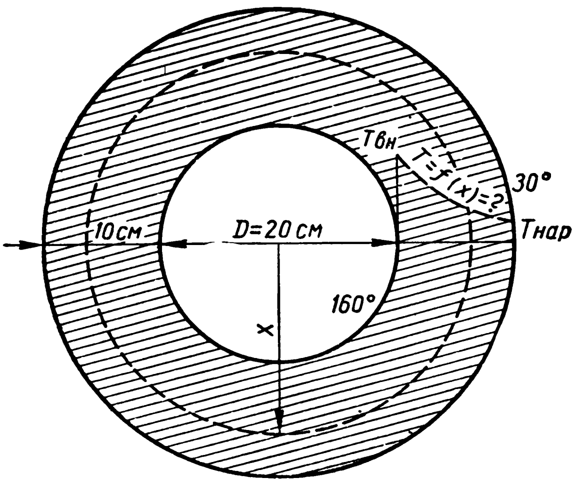

Рис. 8

циента теплопроводности $k=0{,}00017$. *Температура трубы* 160°; *температура внешнего покрова* 30° (*рис.* 8). *Найти распределение температуры внутри изоляции, а также количество тепла, отдаваемого* 1 *погонным метром трубы.*

Решение

Если тело находится в стационарном тепловом состоянии и температура T в каждой его точке есть функция только одной координаты x, то согласно закону теплопроводности Фурье количество теплоты, испускаемое в секунду:

$$Q = -kF(x)\frac{dT}{dx} = \text{const}, \tag{1}$$

где $F(x)$ — площадь сечения тела на расстоянии x,
k — коэффициент теплопроводности.

Здесь

$$F(x) = 2\pi x l, \tag{2}$$

где l — длина трубы в *см*,
x — радиус трубопровода в *см*.

Таким образом, после разделения переменных дифференциальное уравнение задачи примет вид:

$$dT = -\frac{Q}{kF(x)}dx = -\frac{Q}{k\cdot 2\pi l}\frac{dx}{x}. \tag{3}$$

Интегрируя обе части равенства (3), находим:

$$\left.\begin{aligned} &\text{а)} \quad \int_{160}^{30} dT = -\frac{Q}{0,00017\cdot 2\pi l}\int_{10}^{20}\frac{dx}{x}, \\ &\text{б)} \quad \int_{160}^{T} dT = -\frac{Q}{0,00017\cdot 2\pi l}\int_{10}^{x}\frac{dx}{x}, \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} &\text{а)} \\ &T\Big|_{160}^{30} = 30 - 160 = -\frac{Q}{0,00017\cdot 2\pi l}\ln x\Big|_{10}^{20} = -\frac{Q}{0,00017\cdot 2\pi l}\ln 2, \\ &\text{б)} \\ &T - 160 = -\frac{Q}{0,00017\cdot 2\pi l}\ln x\Big|_{10}^{x} = -\frac{Q}{0,00017\cdot 2\pi l}\ln 0,1x. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Разделив почленно уравнения б) (4) на а) (4), получим:

$$\frac{T-160}{-130} = \frac{\ln 0,1x}{\ln 2} = \frac{\lg 0,1x}{\lg 2},$$

отсюда закон распределения температуры внутри изоляции:

$$T = 591,8 - 431,8\lg x.$$

Из уравнения (4, *а*) при $l = 100$ *см* имеем:

$$Q = \frac{130\cdot 0,00017\cdot 2\pi\cdot 100}{\ln 2} = \frac{200\pi\cdot 130\cdot 0,00017}{0,69315}.$$

Количество теплоты, отдаваемое в течение суток, равно:

$$24\cdot 60\cdot 60Q=86\,400\,\frac{200\pi\cdot 130\cdot 0,00017}{0,69315}=1\,730\,600\ кал.$$

Задача 12. *Изолированному проводнику сообщен заряд $Q_0=1000$ CGSE единиц. Вследствие несовершенства изоляции проводник постепенно теряет свой заряд. Скорость потери заряда в данный момент пропорциональна наличному заряду проводника. Какой заряд останется на проводнике по истечении времени $t=10$ мин, если за первую минуту потеряно 100 CGSE единиц?*

Решение

К моменту t заряд проводника равен Q. Скорость потери заряда в этот момент равна $-\frac{dQ}{dt}$. Так как эта скорость пропорциональна заряду Q, то получим следующее дифференциальное уравнение процесса:

$$-\frac{dQ}{dt}=kQ,$$

где k — коэффициент пропорциональности.
Интегрируя это уравнение, получим общее решение:

$$Q=Ce^{-kt}.$$

Используем начальное условие: при $t=0$ $Q=Q_0$;
отсюда

$$Q_0=Ce^{-k\cdot 0}$$

и

$$C=Q_0.$$

Следовательно, закон протекающего процесса:

$$Q=Q_0e^{-kt}.$$

Согласно дополнительному условию при $t=1$

$$Q=900\ CGSE \text{ единиц},$$

откуда

$$900=1000\,e^{-k\cdot 1},$$
$$e^{-k}=0,9.$$

Подставляя эти данные, получим:

$$Q=1000\cdot 0,9^{t}.$$

Таким образом, после 10 *мин* на проводнике останется заряд

$$Q=1000\cdot 0,9^{10}\approx 348,7\ CGSE \text{ единиц}.$$

Задача 13. *На расстоянии a друг от друга в точках A и B сосредоточены два равных разноименных заряда $+q$ и $-q$. Приняв* *точку A за начало координат и направив ось X по линии AB, составить уравнение семейства эквипотенциальных линий электрического поля, создаваемого указанными зарядами.*

Решение

Эквипотенциальные линии, или линии равного потенциала, ортогональны силовым линиям поля. Силовая линия в любой своей точке направлена по вектору электрической силы, действующей на положительный заряд, помещенный в эту точку.

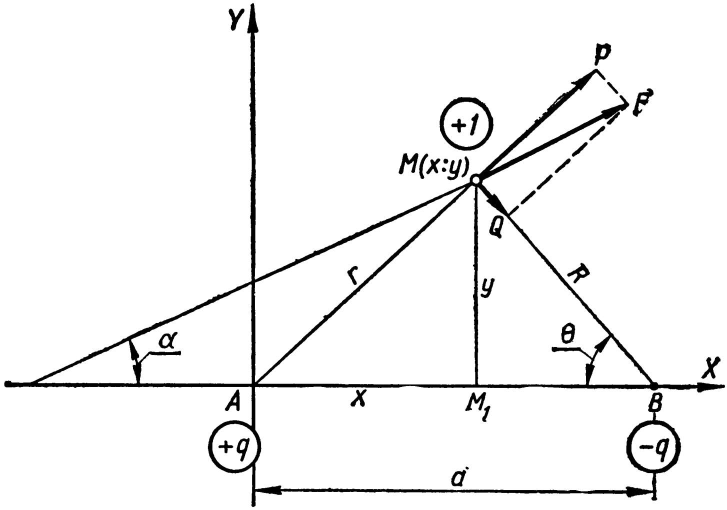

Рис. 9

Пусть в точке $M(x; y)$ поля помещена положительная единица заряда (+1).

По закону Кулона на эту единицу действуют силы:

$$\left.\begin{aligned} P &= k\frac{q}{r^2}, \\ Q &= k\frac{q}{R^2}, \end{aligned}\right\}$$

где k — диэлектрическая постоянная среды.

Проекции этих сил на соответствующие оси будут (рис. 9):

$$\left.\begin{aligned} P_x &= k\frac{q}{r^2}\cos\varphi = kq\frac{x}{r^3}, \\ P_y &= k\frac{q}{r^2}\sin\varphi = kq\frac{y}{r^3}, \\ Q_x &= k\frac{q}{R^2}\cos\theta = kq\frac{a-x}{R^3}, \\ Q_y &= k\frac{q}{R^2}\sin\theta = -kq\frac{y}{R^3}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Здесь

$$\cos\varphi=\frac{x}{r}, \qquad \sin\varphi=\frac{y}{r},$$

$$\cos\theta=\frac{a-x}{R}, \qquad \sin\theta=\frac{y}{R}.$$

Составляющие равнодействующей силы F будут равны:

$$\left.\begin{aligned} F_x&=P_x+Q_x=kq\left(\frac{x}{r^3}+\frac{a-x}{R^3}\right)=kq\,\frac{x(R^3-r^3)+ar^3}{r^3R^3}, \\ F_y&=P_y+Q_y=kq\left(\frac{y}{r^3}-\frac{y}{R^3}\right)=kq\,\frac{y(R^3-r^3)}{r^3R^3}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Направление этой силы (угловой коэффициент) будет:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{F_y}{F_x}=\frac{y(R^3-r^3)}{x(R^3-r^3)+ar^3}. \qquad (3)$$

Такое же направление имеет и силовая линия в точке $M(x;\,y)$. Направление в этой точке эквипотенциальной линии, как ортогональной к силовой линии, будет:

$$\operatorname{tg}\alpha_1=-\frac{x(R^3-r^3)+ar^3}{y(R^3-r^3)}. \qquad (4)$$

С другой стороны,

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{dy}{dx}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение искомого семейства эквипотенциальных линий:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x(R^3-r^3)+ar^3}{y(R^3-r^3)}. \qquad (5)$$

Введем новые переменные R и r, полагая

$$\left.\begin{aligned} R^2&=(a-x)^2+y^2, \\ r^2&=x^2+y^2. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Дифференцируем:

$$\left.\begin{aligned} RdR&=-(a-x)\,dx+ydy, \\ rdr&=xdx+ydy. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Из системы (7) определим dx, dy и $\frac{dy}{dx}$. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} dx&=\frac{rdr-RdR}{a}, \\ dy&=\frac{(a-x)\,rdr+xRdR}{ay}, \\ \frac{dy}{dx}&=\frac{(a-x)\,rdr+xRdR}{y(rdr-RdR)}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Сравнивая уравнение (5) с уравнением (8), получим:

$$\frac{(a-x)\,r\,dr+xRdR}{y(r\,dr-RdR)}=-\frac{x(R^3-r^3)+ar^3}{y(R^3-r^3)},$$

или после упрощения:

$$R^2dr=r^2dR. \tag{9}$$

Формула (9) приводит нас к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными:

$$\frac{dr}{r^2}=\frac{dR}{R^2}.$$

Интегрируя его, получим общее решение:

$$\frac{1}{R}-\frac{1}{r}=C.$$

Это уравнение указывает на основное геометрическое свойство эквипотенциальных линий рассматриваемого поля.

Разность величин, обратных расстояниям текущей точки от заряженных центров поля, есть величина постоянная. Переходя к декартовым координатам, получим уравнение искомого семейства в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{(a-x)^2+y^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=C.$$

Задача 14. *Скорость распада радия в каждый момент времени прямо пропорциональна наличной его массе. Определить, какой процент массы* m_0 *радия распадется через* 200 *лет, если известно, что период полураспада радия (период времени, по истечении которого распадается половина наличной массы радия) равен* 1590 *лет.*

Решение

Скорость распада радия измеряется его количеством, распавшимся в единицу времени. За малый промежуток времени Δt, истекший с некоторого момента времени t, количество распавшегося радия равно $km\Delta t$, где m — количество радия в данный момент, k — коэффициент пропорциональности. Это же количество, взятое с отрицательным знаком (масса убывает), равно приращению массы за время Δt:

$$\Delta m=-km\Delta t. \tag{1}$$

Обе части равенства (1) делим на Δt и переходим к пределу при $\Delta t \to 0$.
Тогда

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{dm}{dt}=-km. \tag{2}$$

Таким образом, равенство (2) представляет дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.
Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dm}{m}=-kdt. \tag{3}$$

Интегрируя уравнение (3), найдем:

$$\ln m = -kt + \ln C,$$

или после потенцирования

$$m = Ce^{-kt}. \qquad (4)$$

Постоянную C находим из начального условия $m = m_0$ при $t = 0$ (где m_0 — масса в начальный момент $t = 0$).
Получим:

$$m_0 = Ce^{-k \cdot 0},$$

откуда

$$C = m_0.$$

Уравнение (4) можно переписать следующим образом:

$$m = m_0 e^{-kt}.$$

Коэффициент k определится из дополнительного условия, что период полураспада радия равен 1590 лет: при $t = 1590$ $m = \frac{m_0}{2}$. Таким образом,

$$\frac{m_0}{2} = m_0 \cdot e^{-1590k},$$

или

$$-1590k = -\ln 2,$$
$$k = 0{,}00044.$$

Искомая функция

$$m(t) = m_0 \cdot e^{-0{,}00044t}.$$

Количество радия, оставшегося нераспавшимся через 200 лет:

$$m(200) = m_0 \cdot e^{-0{,}00044 \cdot 200} = m_0 e^{-0{,}088} = 0{,}915 m_0.$$

Следовательно, через 200 лет распадается лишь 8,5% радия.

2. Теоретическая механика

Задача 15. *Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью $v_0 = 20$ км/час. На полном ходу ее мотор выключается и через 40 сек после этого скорость лодки уменьшается до $v_1 = 8$ км/час* (рис. 10).

Сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки. Определить скорость лодки через 2 мин после остановки мотора.

Решение

На движущуюся лодку действует сила $F = -kv$, где k — коэффициент пропорциональности. По закону Ньютона сила равна произведению массы на ускорение $F = m\frac{dv}{dt}$.

Откуда дифференциальное уравнение движения

$$m\,\frac{dv}{dt}=-kv. \qquad (1)$$

Очевидно,

$$\frac{dv}{v}=-\frac{k}{m}\,dt,$$

или

$$\ln v=-\frac{k}{m}\,t+C_1.$$

Потенцируя, получим общее решение уравнения (1):

$$v=e^{-\frac{k}{m}+C_1}=e^{C_1}e^{-\frac{k}{m}\cdot t}=C\cdot e^{-\frac{k}{m}t}.$$

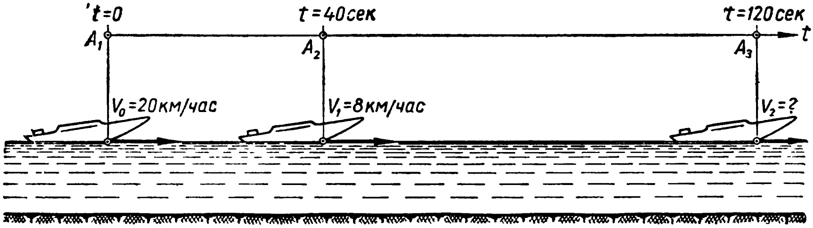

Рис 10

Начальное условие: при $t=0$ $v=20$ *км/час*.
Откуда

$$20=Ce^{-\frac{k}{m}\cdot 0} \text{ и } C=20.$$

Тогда общий закон движения для данных условий задачи

$$v=20e^{-\frac{k}{m}\cdot t}. \qquad (2)$$

Дополнительное условие указывает, что при $t=40\,сек=\frac{1}{90}$ часа скорость лодки составляет 8 *км/час*. Отсюда

$$8=20e^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{90}}, \text{ или } e^{\frac{k}{m}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{90}.$$

Подставляя числовые данные задачи в найденный закон движения (2), учитывая при этом, что $t=2\,мин=\frac{1}{30}$ *часа*, получим:

$$v=20\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{90}\right]^{-\frac{1}{30}}=20\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}=\frac{32}{25}\cong 1{,}28 \text{ км/час}.$$

Итак, скорость лодки спустя 2 *мин* снизится до величины 1,28 *км/час*.

Задача 16. *Судно водоизмещением в* 12 000 *тонн* (*рис.* 11) *движется прямолинейно со скоростью* $v_0=20$ *м/сек. Сопротивление воды пропорционально квадрату скорости судна и равно* 36 *тоннам при скорости* 1 *м/сек. Какое расстояние пройдет судно после остановки двигателя, прежде чем скорость станет равной* 5 *м/сек? В какое время судно пройдет это расстояние?*

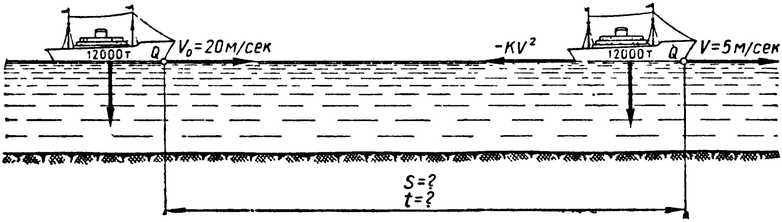

Рис. 11

Решение

Количество движения системы (судна) равно количеству движения центра масс системы, т. е. вектор

$$Q=Mv_c,$$

где v_c — скорость центра масс,
M — масса всей системы.

Производная вектора количества движения системы по времени равна геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему. Для движения центра масс имеем:

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{Mdv_c}{dt}=P.$$

Центр масс системы движется, как материальная точка с массой, равной массе всей системы, к которой приложены все действующие на систему внешние силы. Движению судна препятствует сопротивление воды, равное $-kv^2$.

Таким образом, дифференциальное уравнение задачи есть

$$M\frac{dv}{dt}=-kv^2, \tag{1}$$

или

$$\frac{12\,000}{g}\frac{dv}{dt}=-36v^2.$$

Разделяя переменные и принимая $g=10$ *м/сек*^{2}, получим:

$$v^{-2}dv=-0{,}03dt, \tag{2}$$

или, проинтегрировав,

$$-\frac{1}{v}=-0{,}03t+C_1. \tag{3}$$

Определяем частное решение, исходя из начальных условий при $t=0$, $v=16$ *м/сек*:

$$C_1=-\frac{1}{16}$$

и

$$\frac{1}{v}=0{,}03t+\frac{1}{16}. \tag{4}$$

Прежде чем скорость судна станет равной 5 *м/сек*, пройдет время:

$$t=\frac{25\,(16-v)}{12v}=\frac{25\,(16-5)}{12\cdot 5}=\frac{55}{12}\cong 4{,}6 \text{ сек.}$$

Определим теперь расстояние, которое пройдет судно за время $t=4{,}6$ *сек*. Интегрируем еще раз уравнение (4) и, принимая предварительно $v=\frac{ds}{dt}$, получаем:

$$ds=\frac{dt}{0{,}03t+\frac{1}{16}}=\frac{400dt}{12t+25}.$$

Откуда

$$s=\frac{100}{3}\ln(12t+25)+C_2.$$

Определяем C_2 из начальных условий, при $t=0$, $s=0$:

$$0=\frac{100}{3}\ln 25+C_2 \quad \text{и} \quad C_2=-\frac{100}{3}\ln 25.$$

Таким образом, закон движения судна в зависимости от времени будет:

$$s=\frac{100}{3}\ln\left(\frac{12}{25}t+1\right).$$

За время $t=4{,}6$ *сек* судно пройдет расстояние:

$$s=\frac{100}{3}\ln 3{,}20\cong 38{,}8 \text{ м}.$$

Итак, судно после остановки двигателя, прежде чем его скорость станет 5 *м/сек*, пройдет расстояние 38,8 *м* за время 4,6 *сек*.

Задача 17. *Ракета выстрелена вертикально вверх с начальной скоростью* $v_0=100$ *м/сек* (рис. 12). *Сопротивление воздуха замедляет ее движение, сообщая ракете отрицательное ускорение, равное* $-kv^2$ (*где* v — *мгновенная скорость ракеты, а* k — *аэродинамический коэффициент*).

Определить время достижения ракетой наивысшего положения.

Решение

Движение ракеты принимаем условно за движение материальной точки M.

Тогда общее ускорение ракеты j при движении вверх будет:

$$\underbrace{j=-g}_{\substack{\text{ускорение}\\\text{свободного}\\\text{падения}\\\text{тела}}} \quad - \quad \underbrace{kv^2}_{\substack{\text{сопротивление}\\\text{воздуха}}}. \qquad (1)$$

Но

$$j=\frac{dv}{dt}, \qquad (2)$$

и тогда уравнение (1) примет вид:

$$\frac{dv}{dt}=-(g+kv^2). \qquad (3)$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dv}{g+kv^2}=-dt,$$

или

$$\frac{dv}{1+\frac{kv^2}{g}}=-g\,dt. \qquad (4)$$

Для интегрирования проводим очевидные преобразования уравнения (4):

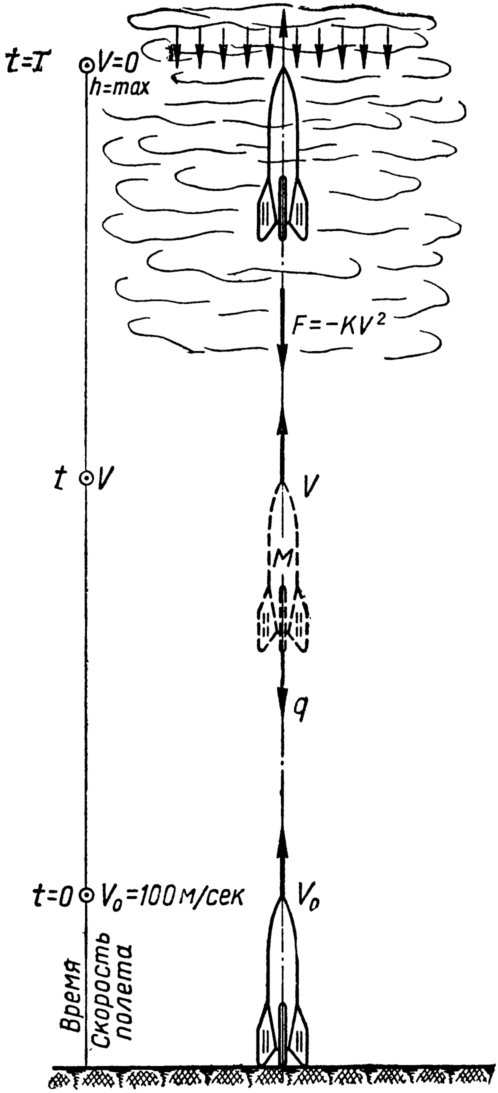

Рис. 12

$$\frac{d\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\,v\right)}{\sqrt{\frac{k}{g}\left[1+\left(v\cdot\sqrt{\frac{k}{g}}\right)^2\right]}}=-g\,dt,$$

или

$$\sqrt{\frac{g}{k}}\cdot\frac{\left(d\sqrt{\frac{k}{g}}\cdot v\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\cdot v\right)^2}=-g\,dt. \qquad (5)$$

Уравнение (5) можно уже легко почленно проинтегрировать:

$$\int \frac{d\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\,v\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\,v\right)^2}=-\sqrt{gk}\int dt,$$

и получаем общее решение уравнения (3):

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\,v\right)=-\sqrt{gk}\,t+C. \tag{6}$$

Для условий данной задачи, при $t=0$, $v=v_0=100$ *м/сек*, величина

$$C=\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\,v_0\right)=\operatorname{arc\,tg} 100\sqrt{\frac{k}{g}},$$

и частное решение примет вид:

$$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{k}{g}}\,v-\operatorname{arc\,tg} 100\sqrt{\frac{k}{g}}=-\sqrt{gk}\,t. \tag{7}$$

В момент достижения ракетой своего «потолка» $t=T$ мгновенная скорость ракеты v равна нулю. Подставляя в формулу (7) $t=T$, $v=0$ и принимая $g=10$ *м/сек*^{2}, определяем:

$$T=\frac{\operatorname{arc\,tg}\left(100\sqrt{\frac{k}{g}}\right)}{\sqrt{gk}}=\frac{\operatorname{arc\,tg}\left(31,62\sqrt{k}\right)}{3,162\sqrt{k}}. \tag{8}$$

Итак, ракета достигнет своего наивысшего положения через время T, определяемое формулой (8).

Задача 18. *Падающее под действием силы тяжести тело* (*рис.* 13) *получает ускорение* $\frac{k}{r^2}$, *где* k — *коэффициент пропорциональности,* r — *расстояние падающего тела от центра Земли. Найти время падения тела, если оно находится от Земли на расстоянии* $R=60,27r_{\text{зем}}$. *Радиус Земли* $r_{\text{зем}}=6377$ *км* $=6,377\cdot10^6$ *м.*

Решение

Пусть R — расстояние Луны от центра Земли,
g — ускорение силы тяжести на поверхности Земли.

Согласно общей формуле это ускорение на поверхности Земли равно $\frac{k}{r^2}$, поэтому

$$\omega=\frac{k}{r_{\text{зем}}^2}=-g. \tag{1}$$

Знак минус взят потому, что расстояния считаются от начала ($R=0$), а ускорение направлено к началу. Из уравнения (1) имеем:

$$k=-gr^2_{\text{зем}}.$$

Тогда общее выражение для ускорения примет вид:

$$\omega=-\frac{gr^2_{\text{зем}}}{r^2}. \qquad (2)$$

С другой стороны, предполагая, что тело падает к центру Земли O прямолинейно (рис. 13), имеем:

$$v=\frac{dr}{dt}, \qquad \omega=\frac{dv}{dt}.$$

Откуда

$$\frac{\omega}{v}=\frac{dv}{dr}; \qquad \omega=\frac{v\,dv}{dr}.$$

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение задачи:

$$\frac{vdv}{dr}=-\frac{gr^2_{\text{зем}}}{r^2}. \qquad (3)$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим уравнение задачи:

$$v^2=\frac{2gr^2_{\text{зем}}}{r}+C. \qquad (4)$$

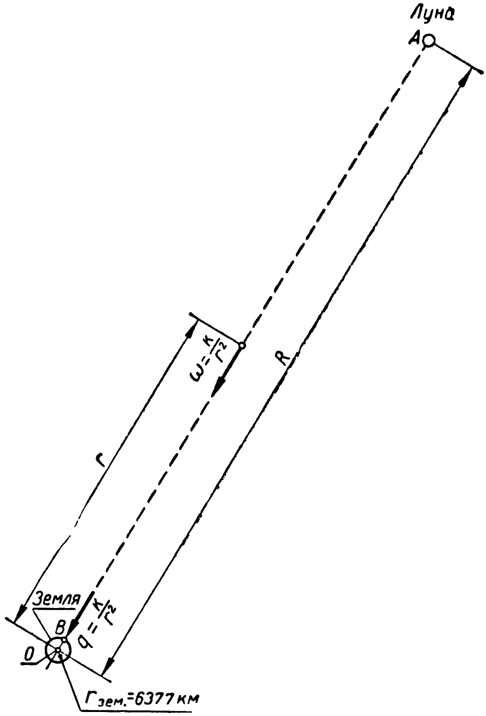

Рис. 13

Из начальных условий известно, что при $r=R$ $v=0$. Подставляя эти значения в уравнение (4), получим:

$$C=-2g\frac{r^2_{\text{зем}}}{R}. \qquad (5)$$

Одновременно

$$v=\frac{dr}{dt}=-\sqrt{2gr^2_{\text{зем}}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right)},$$

откуда

$$dt=-\sqrt{\frac{rR}{2gr^2_{\text{зем}}(R-r)}}\,dr.$$

Интегрируя, получим:

$$t=-\int\limits_{R}^{r_{\text{зем}}}\sqrt{\frac{rR}{2gr_{\text{зем}}^{2}(R-r)}}\,dr=\int\limits_{r_{\text{зем}}}^{R}\sqrt{\frac{rR}{2gr_{\text{зем}}^{2}(R-r)}}\,dr. \qquad (6)$$

Интеграл (6) вычисляется подстановкой:

$$\frac{r}{R-r}=\operatorname{tg}^{2}\varphi, \qquad (7)$$

откуда

$$r=\frac{R\operatorname{tg}^{2}\varphi}{1+\operatorname{tg}^{2}\varphi}=R\sin^{2}\varphi, \qquad (8)$$

а

$$dr=2R\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi.$$

Из (8) имеем:

$$\sin^{2}\varphi_{1}=\frac{r_{\text{зем}}}{R},\quad \sin^{2}\varphi_{2}=1,\ \text{т. е.}$$

$$\varphi_{1}=\arcsin\sqrt{\frac{r_{\text{зем}}}{R}};\qquad \varphi_{2}=\frac{\pi}{2}. \qquad (9)$$

Подставляя значения (7), (8) и (9) в формулу (6), получаем:

$$t=\sqrt{\frac{R}{2gr_{\text{зем}}^{2}}}\int\limits_{\varphi_{1}}^{\varphi_{2}}\operatorname{tg}\varphi\,2R\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{R}{r_{\text{зем}}}\sqrt{\frac{R}{2g}}\int\limits_{\varphi_{1}}^{\varphi_{2}}2\sin^{2}\varphi\,d\varphi=\frac{R}{r_{\text{зем}}}\sqrt{\frac{R}{2g}}\int\limits_{\varphi_{1}}^{\varphi_{2}}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{R}{r_{\text{зем}}}\sqrt{\frac{R}{2g}}\left(\varphi_{2}-\varphi_{1}-\frac{\sin 2\varphi_{2}}{2}+\frac{\sin 2\varphi_{1}}{2}\right)=$$

$$=\frac{R}{r_{\text{зем}}}\sqrt{\frac{R}{2g}}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\sqrt{\frac{r_{\text{зем}}}{R}}+\frac{\sin 2\varphi_{1}}{2}\right).$$

Подставляя числовые значения, найдем время в секундах. Разделив на 3600, получим его величину в часах:

$$t=\frac{60{,}27}{3600}\sqrt{\frac{60{,}27\cdot 6{,}377\cdot 10^{6}}{19{,}62}}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_{1}+\frac{\sin 2\varphi_{1}}{2}\right)\cong 116\ \textit{час}$$

$$(\varphi_{1}=7^{\circ}24'33''=0{,}1292\ \text{радиана}).$$

Итак, тело, находящееся от Земли на таком же расстоянии, как и Луна, упадет на Землю через 116 *час* (почти 5 суток).

Задача 19. *С некоторой высоты брошено вертикально вниз тело массы m. Найти закон изменения скорости v падения этого тела, если на него действует сила тяжести и тормозящая сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости (коэффициент пропорциональности k).*

Решение

Задача заключается в определении неизвестного закона изменения скорости v с течением времени t, т. е. $v=f(t)$.

Из второго закона Ньютона

$$m\frac{dv}{dt}=F,$$

где $\frac{dv}{dt}$ — ускорение движущегося тела,

F — сила, действующая на тело в направлении движения.

Сила F складывается из двух сил: силы тяжести mg и силы сопротивления воздуха — kv (рис. 14).

Итак,

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv. \qquad (1)$$

Разделяя переменные, получим:

$$dt=\frac{mdv}{mg-kv}=\frac{dv}{g-\frac{k}{m}v}. \qquad (2)$$

Интегрируем обе части равенства (2):

$$t=-\frac{m}{k}\int\frac{d\left(g-\frac{k}{m}v\right)}{g-\frac{k}{m}v}=$$

$$=-\frac{m}{k}\ln\left(g-\frac{k}{m}v\right)+C.$$

Решая последнее относительно v, получим:

$$\ln\left(g-\frac{k}{m}v\right)=\frac{k}{m}(C-t),$$

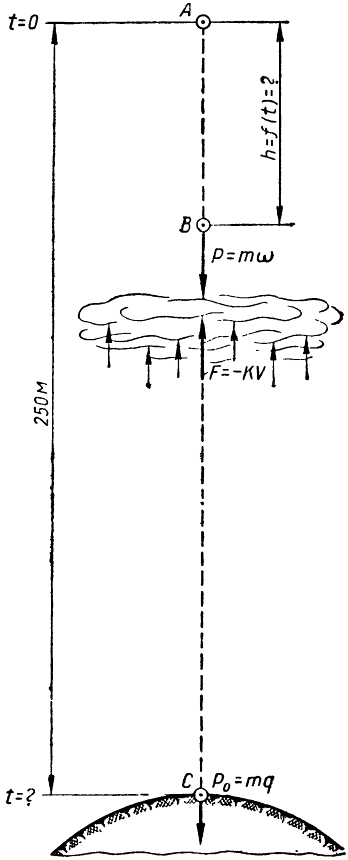

Рис. 14

или

$$g-\frac{k}{m}v=e^{\frac{k}{m}(C-t)}=e^{\frac{k}{m}C}e^{-\frac{k}{m}t}=C_1e^{-\frac{k}{m}t},$$

откуда

$$v=-\frac{m}{k}C_1e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}.$$

Постоянную величину $-\frac{m}{k}C_1$ обозначая через C^*, окончательно придем к уравнению:

$$v=C^*e^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}. \qquad (3)$$

Чтобы найти интересующее нас частное решение, используем дополнительное условие: при сбрасывании тела ему была придана начальная скорость v_0. Считаем ее неизвестной. Но тогда искомая функция $v=f(t)$ должна быть такой, чтобы в начале движения при $t=0$ выполнялось условие $v=v_0$. Подставляя $t=0$, $v=v_0$ в формулу (3), получаем:

$$v_0=C^*+\frac{mg}{k},$$

откуда

$$C^*=v_0-\frac{mg}{k}. \qquad (4)$$

Итак, искомая функция $v=f(t)$ такова:

$$v=\left(v_0-\frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{kt}{m}}+\frac{mg}{k}.$$

Задача 20. *Вес летчика с парашютом 80 кг. Сопротивление воздуха при спуске парашюта пропорционально квадрату его скорости v (коэффициент пропорциональности $k=400$).*

Определить скорость спуска в зависимости от времени и установить максимальную скорость спуска.

Решение

При спуске действующими силами будут: вес парашютиста с парашютом $P=mg$ (направлена книзу) и сопротивление воздуха, оказываемое этому спуску $F=-kv^2$ (направлена кверху). Таким образом, равнодействующая сила

$$R=mg-kv^2. \qquad (1)$$

Согласно второму закону Ньютона

$$R=m\frac{dv}{dt}. \qquad (2)$$

Приравнивая (1) и (2), получим дифференциальное уравнение спуска парашютиста:

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv^2. \qquad (3)$$

Решая его, получим общее решение:

$$\frac{\sqrt{\frac{mg}{k}}+v}{\sqrt{\frac{mg}{k}}-v}=Ce^{2\sqrt{\frac{k}{m}g}\cdot t},$$

или, решая относительно v,

$$v=\sqrt{\frac{mg}{k}}\,\frac{Ce^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t}-1}{Ce^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t}+1}.$$

Используя начальное условие при $t=0$, $v=0$, получим:

$$\frac{\sqrt{\frac{mg}{k}}+0}{\sqrt{\frac{mg}{k}}-0}=Ce^{0},$$

что позволяет определить произвольную постоянную:

$$C=1$$

и, следовательно, частное решение.

Закон спуска парашютиста примет при этом искомое выражение (для вычисления скорости парашютиста):

$$v=\sqrt{\frac{mg}{k}}\,\frac{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t}-1}{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t}+1}. \qquad (4)$$

Как явствует из уравнения (4), правая часть равенства представляет дробь всегда меньше единицы. Предел дроби при $t\longrightarrow\infty$ равен 1. Таким образом, максимальное значение скорости v будет:

$$v_{\max}=\lim_{t\to\infty}\sqrt{\frac{mg}{k}}\,\frac{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t}-1}{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t}+1}=\sqrt{\frac{mg}{k}}. \qquad (5)$$

Такой скорости парашютист никогда не достигнет, так как $v=v_{\max}$ при $t=\infty$. Практически дробь формулы (4) уже при $t=2$ *сек* очень мало отличается от единицы. Максимальная скорость достигается парашютистом через 2 *сек* после начала спуска. Величины максимальной скорости спуска получаются после подстановки числовых данных задачи в формулу (5):

$$v_{\max}=\sqrt{\frac{80\,000\cdot 981}{400}}\cong 443\,\frac{см}{сек}\cong 4{,}4\,\frac{м}{сек}.$$

Задача 21. *Проходя через лес и испытывая сопротивление деревьев, ветер теряет часть своей скорости. На бесконечно малом пути эта потеря пропорциональна скорости в начале этого пути и длине его.*

Найти скорость ветра, прошедшего в лесу 150 *м, зная, что до вступления в лес начальная скорость ветра* $v_0 = 12$ *м/сек; после прохождения в лесу пути* $S = 1$ *м, скорость ветра уменьшилась до величины* $v_1 = 11{,}8$ *м/сек.*

Решение

Пусть на расстоянии S от начала леса скорость ветра v, потеря скорости на пути dS равна $-dv$ (процесс убывающий). Эта потеря пропорциональна v, и поэтому дифференциальное уравнение процесса представится в виде равенства:

$$-dv = kvdS.$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dv}{v} = -kdS.$$

Интегрируя, получим общее решение задачи:

$$v = Ce^{-kS}.$$

Ищем частное решение, используя начальное условие, при $S = 0$, $v = v_0$.

Отсюда $v_0 = Ce^{-k \cdot 0}$, или

$$C = v_0.$$

Закон процесса

$$v = v_0 e^{-kS}. \tag{1}$$

Для определения коэффициента пропорциональности используем дополнительное условие: при

$$S = 1 \text{ м}, \quad v = v_1 = 11{,}8 \text{ м/сек}.$$

Откуда $v_1 = v_0 e^{-k}$,
или

$$e^{-k} = \frac{v_1}{v_0} = \frac{11{,}8}{12} = 0{,}983.$$

Числовые значения подставляем в уравнение процесса (1), откуда искомая скорость

$$v = 12\,(0{,}983)^{150} = 12 \cdot 0{,}0776 \cong 0{,}93 \text{ м/сек}.$$

Итак, скорость ветра, углубившегося на 150 *м* в лес, составит 0,93 *м/сек*.

Задача 22. *Судно выходит из точки O и с постоянной скоростью плывет по направлению прямой Oy (рис. 15, а). В тот же момент времени ($t = 0$) из точки A, расположенной на расстоянии $OA = a$ от судна, выходит вдогонку на пересечение катер, плывущий со скоростью, дважды превышающей скорость судна. Найти уравнение описанной катером кривой погони и минимальное время, необходимое ему для достижения судна.*

Решение

Пусть x и y — координаты катера в момент t; в этот момент судно находится в точке B и прошло путь $OB = vt$ (рис. 15, *б*).

Пусть l — длина дуги AC. Вычислим угол наклона касательной $\frac{dy}{dx}$ в точке C:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \theta = -\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = -\left(\frac{vt - y}{x}\right) = \frac{y - vt}{x}.$$

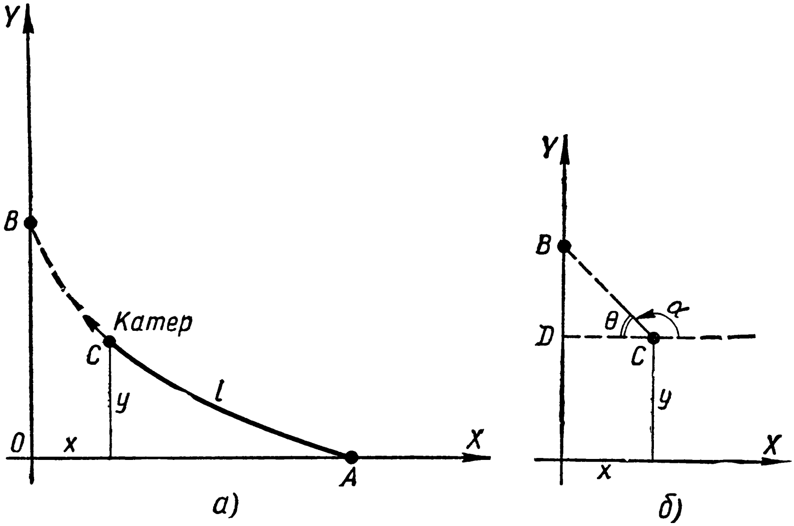

Рис. 15

С другой стороны, $l = 2vt$. Таким образом,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - v \cdot \frac{l}{2v}}{x},$$

$$x \frac{dy}{dx} - y = -\frac{l}{2}. \qquad (1)$$

Как известно, длина дуги определяется формулой:

$$dl = \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Дифференцируя уравнение (1), получаем:

$$\frac{dy}{dx} \cdot 1 + x \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{dl}{dx},$$

или, подставляя выражение для длины дуги, находим:

$$x \frac{dy'}{dx} = -\frac{1}{2} \sqrt{1 + y'^2}.$$

Разделяя переменные, имеем:

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{1}{2}\frac{dx}{x}. \qquad (2)$$

Интегрируем уравнение (2) почленно. Получаем общее решение уравнения:

$$\ln(y'+\sqrt{1+y'^2})=\frac{1}{2}\ln x+C.$$

Определяем величину C, используя начальные условия: при $t=0$, $y'=0$ и $x=a$.

Таким образом,

$$0=\frac{1}{2}\ln a+C$$

и

$$C=-\frac{1}{2}\ln a.$$

Тогда

$$\ln(y'+\sqrt{1+y'^2})=\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{2}\ln a=\ln\sqrt{\frac{x}{a}},$$

или после потенцирования

$$y'+\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{\frac{x}{a}}, \qquad (3)$$

или

$$\frac{1}{y'+\sqrt{1+y'^2}}=\sqrt{\frac{a}{x}}.$$

Продолжаем преобразования:

$$\frac{y'-\sqrt{1+y'^2}}{(y'+\sqrt{1+y'^2})(y'-\sqrt{1+y'^2})}=\sqrt{\frac{a}{x}},$$

$$\frac{y'-\sqrt{1+y'^2}}{y'^2-1-y'^2}=\sqrt{\frac{a}{x}}$$

и окончательно

$$y'-\sqrt{1+y'^2}=-\sqrt{\frac{a}{x}}. \qquad (4)$$

Складывая равенства (3) и (4) и деля результат на 2, получим:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{a}{x}}\right),$$

$$dy=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{x}{a}}-\sqrt{\frac{a}{x}}\right)dx.$$

Интегрируя, находим:

$$y=\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{x}{a}}\,dx-\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{a}{x}}\,dx+C,$$

или

$$y=\frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{a}}-\sqrt{ax}+C. \qquad (5)$$

Для нахождения частного решения используем начальные условия: при $x=a$, $y=0$. Таким образом, $C=\frac{2a}{3}$, и уравнение искомой кривой примет вид:

$$y=\frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{a}}-\sqrt{ax}+\frac{2a}{3}.$$

Катер догоняет судно при $x=0$. Отсюда, полагая в (5) $x=0$, найдем путь, пройденный судном:

$$y=\frac{2a}{3}$$

и искомое время

$$t=\frac{y}{v}=\frac{2a}{3v}.$$

Задача 23. *При небольших скоростях сопротивление движению поезда определяется эмпирической формулой:*

$$R=(2{,}5+0{,}05v)\,Q\ \text{кГ},$$

где Q — вес поезда в тоннах и v — скорость в м/сек. Найти, через сколько времени и на каком расстоянии рудничный поезд приобретает на горизонтальном участке пути скорость $v=$ $=12$ км/час, если вес поезда с электровозом $Q=40$ т, а сила тяги электровоза $F=200$ кГ. Определить также силу тяги N электровоза при дальнейшем равномерном движении.

Решение

Масса поезда

$$m=\frac{Q\cdot 1000}{g}\left[\frac{\text{кг}\cdot\text{сек}^2}{\text{м}}\right].$$

Составляя уравнение равновесия действующих на состав сил (рис. 16), после деления на m, получим:

$$\frac{dv}{dt}+\frac{g\cdot 2{,}5}{1000}+\frac{g\cdot 0{,}05}{1000}v-\frac{F\cdot g}{Q\cdot 1000}=0,$$

или

$$\frac{dv}{dt}+24{,}5\cdot 10^{-3}+0{,}49\cdot 10^{-3}\,v-49\cdot 10^{-3}=0;$$

$$\frac{dv}{dt}-24{,}5\cdot 10^{-3}+0{,}49\cdot 10^{-3}\,v=0.$$

Разделяя в последнем уравнении переменные, приходим к дифференциальному уравнению:

$$\frac{10^3 \cdot dv}{24,5 - 0,49\,v} = dt\,. \qquad (1)$$

Интегрируя уравнение (1), находим общее решение:

$$-\frac{10^3}{0,49}\ln C\,(24,5 - 0,49\,v) = t. \qquad (2)$$

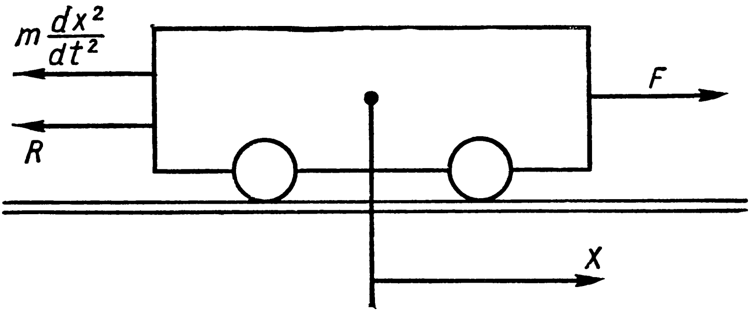

Рис. 16

Постоянную интегрирования C определяем из данных начальных условий: при $t=0$; $v=0$ и, следовательно,

$$-\frac{10^3}{0,49}\ln C\,(24,5 - 0) = 0,$$

или

$$\ln 24,5\,C = 0.$$

Потенцируя, окончательно находим:

$$C = \frac{1}{24,5}\,.$$

Согласно условию задачи в искомое время $t=T$ скорость поезда составит $v=12$ *км/час* $\approx 3,33$ *м/сек*. Таким образом, из уравнения (2), проводя очевидные алгебраические преобразования, находим:

$$-\frac{10^3}{0,49}\ln\frac{1}{24,5}(24,5 - 0,49\,v) = \frac{10^3}{0,49}\left[-\ln\left(1 - \frac{0,49v}{24,5}\right)\right] =$$

$$= \frac{10^3}{0,49}\left[\ln 1 - \ln\frac{24,5 - 0,49\cdot 3,33}{24,5}\right] = \frac{10^3}{0,49}\ln\left(\frac{24,5}{22,9}\right) = 141 \text{ сек.}$$

Переходим к определению расстояния, при котором скорость поезда достигнет 12 *км/час*.

Величина $\frac{dv}{dt}$ может быть выражена следующим образом: $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot v.$

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\frac{10^3 \cdot v dv}{24{,}5 - 0{,}49\, v} = ds. \tag{3}$$

Интегрируя равенство (3), получим общее решение:

$$-\frac{10^3}{0{,}49}\left[v + \frac{24{,}5}{0{,}49}\ln(24{,}5 - 0{,}49\, v) + C\right] = s. \tag{4}$$

Определяем постоянную величину C, используя начальные условия: при $s=0$; $v=0$. Следовательно,

$$C = -\frac{24{,}5}{0{,}49}\ln 24{,}5.$$

Подставляя найденное значение C и скорость $v=3{,}33$ *м/сек* в уравнение (4), находим:

$$s_{(v=12\,км/час)} = \frac{10^3}{0{,}49}\left[\frac{24{,}5}{0{,}49}\ln\frac{24{,}5}{24{,}5 - 0{,}49\, v} - v\right] = 96\ м.$$

При дальнейшем равномерном движении ($v=3{,}33$ *м/сек*) сила тяги равна:

$$N = Q\,(2{,}5 + 0{,}05 \cdot 3{,}33) = 40\,(2{,}5 + 0{,}05 \cdot 3{,}33) = 106{,}6\ кГ.$$

3. Гидравлика и гидрогеология

Задача 24. *На дне цилиндрического резервуара, наполненного жидкостью, образовалась щель (рис. 17). Принимая ско-*

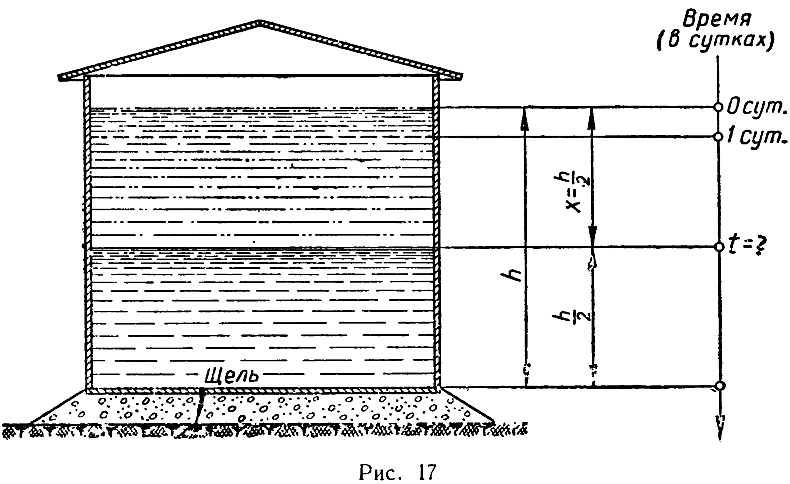

Рис. 17

рость истечения жидкости пропорциональной высоте уровня ее в резервуаре и зная, что в течение первых суток вытекло 10% содержимого, определить, сколько времени потребуется, чтобы из сосуда вытекла половина жидкости.

Решение

Пусть R — радиус резервуара;
h — его высота;
x — высота уровня жидкости в резервуаре по истечении t дней.

Тогда объем жидкости в резервуаре в момент t равен $\pi R^2 x$, а скорость изменения объема — $\pi R^2 \frac{dx}{dt}$. По условию задачи эта величина пропорциональна x, так что дифференциальное уравнение задачи

$$\pi R^2 \frac{dx}{dt} = kx, \tag{1}$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{\pi R^2\, dx}{x} = k\,dt,$$

или, проинтегрировав, находим общее решение:

$$\pi R^2 \ln x = kt + C. \tag{2}$$

По начальным условиям при $t=0$ резервуар полностью наполнен, так что $x=h$.

Следовательно,

$$\pi R^2 \ln h = C,$$

и уравнение (2) примет вид:

$$\pi R^2 \ln x = kt + \pi R^2 \ln h,$$

или

$$\pi R^2 \ln \frac{x}{h} = kt.$$

По дополнительным условиям при $t=1$ $x=\frac{9}{10}h$ и тогда коэффициент пропорциональности

$$k = \pi R^2 \ln \frac{9}{10}.$$

Для интересующего нас случая $\left(\text{при } x=\frac{h}{2}\right)$ искомое время

$$t = \frac{\pi R^2 \ln \frac{x}{h}}{k} = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln \frac{9}{10}} = 6{,}57 \text{ суток.}$$

Итак, для истечения из резервуара половины жидкости через описанную щель потребуется 6 суток 14 часов.

Задача 25. *Два сообщающихся сосуда имеют форму параллелепипедов, у которых площади оснований S и S_1 (рис. 18).*

Найти время, необходимое для установления одинаковых уровней жидкости в сосудах, если $S=S_1=100$ м², начальная разность уровней $h=2{,}5$ м, площадь отверстия между сосудами $\omega=0{,}5$ м², коэффициент гидравлического сопротивления $\delta=0{,}62$.

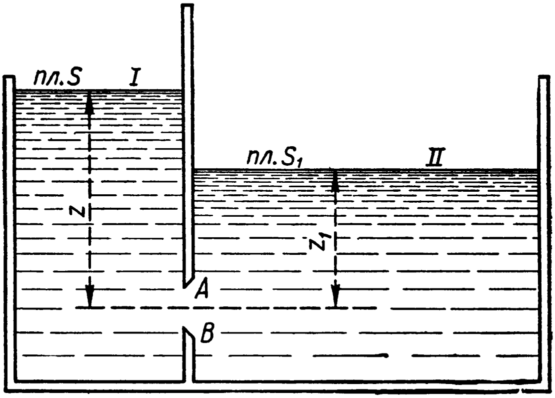

Рис. 18

Решение

Количество жидкости, теряемое первым сосудом, равно количеству жидкости, полученному вторым сосудом.

Поэтому

$$-Sdz=S_1dz_1,$$

отсюда

$$dz-dz_1=\frac{S+S_1}{S_1}\,dz.$$

В течение времени dt через отверстие AB площадью ω пройдет объем жидкости $\delta\omega\sqrt{2g(z-z_1)}\,dt$, и поэтому

$$-Sdz=\delta\omega\sqrt{2g(z-z_1)}\,dt,$$

или

$$\frac{\delta\omega}{S}\sqrt{2g}\,dt=-\frac{dz}{\sqrt{z-z_1}}. \qquad (1)$$

Полагая $z-z_1=u$, получим:

$$du=dz-dz_1=\frac{S+S_1}{S_1}\,dz, \quad \text{откуда } dz=\frac{S_1du}{S+S_1}.$$

Вследствие этого уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\delta\omega}{S}\sqrt{2g}\,dt=-\frac{S_1}{S+S_1}\cdot\frac{du}{\sqrt{u}},$$

а отсюда

$$\frac{\delta\omega}{S}\sqrt{2g}\,T = -\frac{S_1}{S+S_1}\int\limits_h^0 \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{S_1}{S+S_1}\int\limits_0^h \frac{du}{\sqrt{u}}. \qquad (2)$$

Интегрируя равенство (2) и подставляя числовые значения, находим:

$$T = \frac{SS_1\sqrt{2h}}{\delta\omega\,(S+S_1)\sqrt{g}} = 114{,}5\ \textit{сек.}$$

Задача 26. *Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости вращения (рис. 19).*

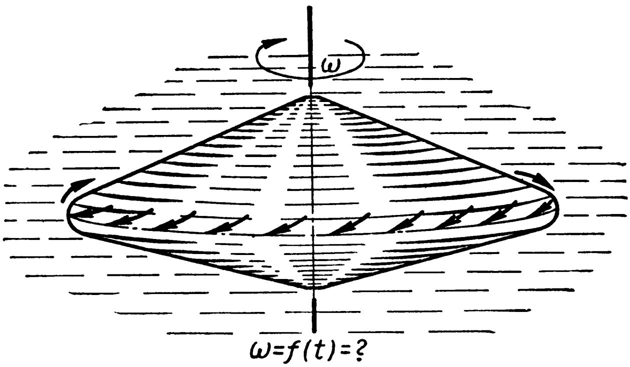

Рис. 19

Найти зависимость угловой скорости от времени, если известно, что диск, начав вращаться со скоростью 200 об/мин, по истечении одной минуты вращается со скоростью 120 об/мин.

Решение

Пусть ω — угловая скорость вращения диска, *об/мин*;

k — коэффициент пропорциональности;

$\frac{d\omega}{dt}$ — изменение угловой скорости вращения диска в жидкости.

Силовому воздействию вращения оказывает сопротивление переменное трение, возникающее при вращении диска в жидкости и зависящее от изменения скорости вращения.

Таким образом, из уравнения действующих сил:

$$\frac{d\omega}{dt} - k\omega = 0,$$

или

$$\frac{d\omega}{dt}=k\omega.$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{d\omega}{\omega}=kdt,$$

и интегрируя

$$\ln\omega=kt+\ln C.$$

После очевидных преобразований:

$$\ln\frac{\omega}{c}=kt,$$

$$\frac{\omega}{c}=e^{kt}.$$

Общее решение уравнения:

$$\omega=Ce^{kt}.$$

Для условия данной задачи необходимо определить конкретные значения C и коэффициента пропорциональности k.

Из начальных условий:

$$t_0=0 \text{ мин}, \qquad \omega_0=200 \text{ об/мин},$$
$$t_1=1 \text{ мин}, \qquad \omega_1=120 \quad » \quad .$$

Тогда

$$\omega(0)=Ce^{k\cdot 0}=200; \quad C=200;$$
$$\omega(1)=Ce^{k\cdot 1}=120.$$

Из второго равенства определим величину k:

$$200\cdot e^k=120, \quad \text{или} \quad e^k=\frac{3}{5};$$

$$k=\ln\frac{3}{5}.$$

Искомая зависимость угловой скорости от времени будет:

$$\omega=200e^{t\cdot\ln\frac{3}{5}}=200\left(e^{\ln\frac{3}{5}}\right)^t=200\left(\frac{3}{5}\right)^t.$$

Задача 27. *Определить уравнение кривой, по которой располагается уровень грунтовых вод вблизи круглого колодца, простирающегося до непроницаемого слоя (рис. 20).*

Решение

Пусть (рис. 20) AB — поверхность земли, CD — поверхность грунтовых вод до устройства колодца, EF — водонепроницаемый слой, ограничивающий снизу поток грунтовых вод.

Если высота воды в колодце поддерживается вычерпыванием на постоянном уровне GH, то поверхность грунтовых вод вблизи от колодца понижается определенным образом (рис. 20).

Кривая поверхности грунтовых вод CD переходит в две искривленные ветки $C'G$ и $D'H$, которые замыкаются на уровне воды GH. Поверхность уровня грунтовых вод представляет собой поверхность вращения вокруг оси Oy меридиональной линии GC' или IID'.

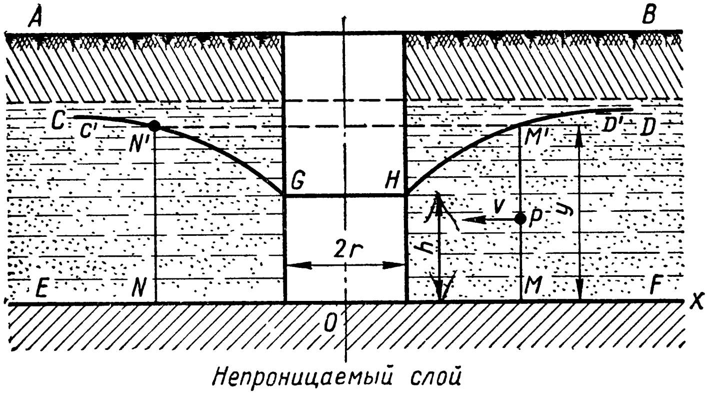

Рис. 20

Кривая HD' определяется на основании опытного правила, по которому скорость течения v воды в точке P пропускающего (дренирующего) грунта пропорциональна наклону кривой в точке M', лежащей на вертикали точки P.

Обозначая коэффициент пропорциональности через k, получим выражение скорости:

$$v=k\frac{dy}{dx}. \tag{1}$$

Через боковую поверхность цилиндра $N'NMM'$ радиально внутрь протекает количество воды:

$$Q=2\pi\, xyv=2\pi\, xyk\frac{dy}{dx}, \tag{2}$$

которое для всего цилиндра радиуса x равно расходу воды в колодце.

Равенство (2) дает дифференциальное уравнение задачи, которое после разделения переменных приводится к виду:

$$\frac{dx}{x}=\frac{2\pi k}{Q}\,ydy. \tag{3}$$

Интегрируя обе части равенства, получим:

$$\ln x=\frac{\pi k}{Q}\,y^2+C. \tag{4}$$

Постоянную интегрирования находим из условия, что кривая поверхности $D'H$ переходит в поверхность колодца GH.

Если диаметр колодца $2r$, а глубина воды в колодце h, то при $x=r$ величина $y=h$, т. е. получаем:

$$\ln r = \frac{\pi k}{Q} h^2 + C, \tag{5}$$

или, решая относительно C,

$$C = \ln r - \frac{\pi k}{Q} h^2. \tag{6}$$

Величину (6) вводим в уравнение (4) и получаем окончательно уравнение искомой кривой:

$$\ln \frac{x}{r} = \frac{\pi k}{Q}(y^2 - h^2),$$

или

$$y^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{x}{r} + h^2.$$

4. Химия и технология производства

Задача 28. *Реакция омыления уксусноэтилового эфира едким натром происходит по уравнению:*

$CH_3COOC_2H_5$	+ $NaOH$	$\longrightarrow CH_3COONa$	$+ C_2H_5OH$.
уксусноэтиловый эфир	едкий натр	уксуснокислый натр	этиловый спирт

Первоначальные концентрации уксусноэтилового эфира и едкого натра были: $a=0{,}01$ и $b=0{,}002$. Спустя 23 минуты концентрация уксусноэтилового эфира уменьшилась на 10%. В какое время она уменьшится на 15%?

Решение

Мы имеем химическую реакцию 2-го порядка* $A_1 + A_2 \longrightarrow$ (конечные продукты реакции); a и b — начальные концентрации веществ A_1 и A_2; x — число прореагировавших к моменту t молей** вещества A_1, а следовательно, и вещества A_2 (каждая моль A_1 соединяется с молью A_2, и поэтому число прореагировавших молей обоих веществ одинаково). В момент t имеем скорость реакции***, равную $\frac{dx}{dt}$.

---

* Порядок химической реакции равен общему числу молекул, входящих в левую часть химического уравнения. Например, $H_2O + SO_3 \rightarrow H_2SO_4$ — реакция 2-го порядка.

** Моль (или грамм-молекула) данного вещества A есть число граммов этого вещества, равное его молекулярному весу. Например: 1 моль воды=18 *г*.

*** Скорость реакции есть та скорость v, с которой система компонентов левой части превращается в систему компонентов правой части уравнения реакции.

Действующая масса (или концентрация реагирующего вещества) A_1, указывающая количество молей вещества в единице объема (1 литре), равна $a-x$ и $b-x$; она пропорциональна и их произведению. Поэтому закон действующих масс выразится дифференциальным уравнением химической реакции второго порядка:

$$\frac{dx}{dt}=K(a-x)(b-x). \tag{1}$$

Отделяя переменные, получим:

$$dt=\frac{dx}{K(a-x)(b-x)}. \tag{2}$$

Для решения дифференциального уравнения (2) применяем метод интегрирования рациональных функций:

$$t=\frac{1}{K}\int\frac{dx}{(a-x)(b-x)}=\frac{1}{K}\int\frac{A\,dx}{a-x}+\frac{1}{K}\int\frac{B\,dx}{b-x}=\frac{1}{K(a-b)}[\ln(a-x)-$$
$$-\ln(b-x)-\ln C]=\frac{1}{K(a-b)}\ln\frac{a-x}{C(b-x)}. \tag{3}$$

Уравнение (3) является общим решением задачи. Для определения величины C используем начальные условия: при $t=0$, $x=0$.

Отсюда

$$0=\frac{1}{K(a-b)}\ln\frac{a}{Cb},$$

или

$$C=\frac{a}{b}.$$

Подставляя C в общее решение (3), получим частное решение:

$$t=\frac{1}{K(a-b)}\ln\frac{b(a-x)}{a(b-x)}. \tag{4}$$

Коэффициент пропорциональности определим из дополнительных условий: при $t=23$ *мин* $x=0,1\,a=0,1\cdot0,01=0,001$.

Отсюда

$$23=\frac{1}{K(0,01-0,002)}\ln\frac{0,002(0,01-0,001)}{0,01(0,002-0,001)}$$
$$\text{и}\quad K\cong3,19.$$

Подставляя полученные числовые значения в решение (4), определим искомое время:

$$t=\frac{1}{3,19(0,01-0,002)}\ln\frac{0,002(0,01-0,0015)}{0,01(0,002-0,0015)}=\frac{1000}{8\cdot3,19}\ln\frac{17}{5}\cong47,9\text{ мин}.$$

Здесь $x=0,15\,a=0,0015$.

Итак, примерно через 48 *мин* количество уксусноэтилового эфира уменьшится на 15%.

Задача 29. *Через сосуд емкостью a литров, наполненный водным раствором некоторой соли, непрерывно протекает жидкость, причем в единицу времени втекает b литров чистой воды и вытекает такое же количество раствора.*

Найти закон, по которому изменяется содержание соли в сосуде в зависимости от времени протекания жидкости через сосуд.

Решение

В данный момент времени t в сосуде содержится некоторое неизвестное нам число x *кг* соли; следовательно, в каждом литре раствора содержится $\frac{x}{a}$ *кг* соли, а в b литрах $\frac{bx}{a}$ *кг*.

Если бы в течение единицы времени, начиная с момента t, концентрация раствора оставалась неизменной, т. е. такой, какой она была в момент t, то количество соли в сосуде за эту единицу времени уменьшилось бы на $\frac{bx}{a}$ *кг*; такова скорость уменьшения количества соли в сосуде для момента t.

С другой стороны, производная:

$$\frac{dx}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

равна скорости прироста количества соли в момент t; следовательно, скорость уменьшения количества соли в момент t будет равна $-\frac{dx}{dt}$.

Итак, имеем:

$$-\frac{dx}{dt}=\frac{bx}{a}. \tag{1}$$

Решим это уравнение. Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dx}{x}=-\frac{b}{a}\,dt,$$

откуда

$$\ln x=-\frac{b}{a}t+\ln C_1.$$

или, потенцируя,

$$x=C_1e^{-\frac{b}{a}t}, \tag{2}$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Предположим для определенности, что в некоторый начальный момент $t=0$ количество соли в сосуде было равно c *кг*.

Полагая в формуле (2) $t=0$, найдем, что

$$C_1=c,$$

и получим окончательно

$$x = ce^{-\frac{b}{a}t},$$

т. е. количество соли убывает с течением времени по «показательному» закону.

5. Процессы прироста

Задача 30. *В культуре пивных дрожжей быстрота прироста действующего фермента пропорциональна наличному его количеству x. Первоначальное количество фермента было a. Через час оно удвоилось. Во сколько раз оно увеличится через 3 часа?*

Решение

По условию задачи дифференциальное уравнение процесса

$$\frac{dx}{dt} = kx, \tag{1}$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dx}{x} = kdt. \tag{2}$$

Общее решение примет вид:

$$x = Ce^{kt}. \tag{3}$$

Определяем C из начального условия: при $t=0$, $x=a$; отсюда

$$a = Ce^{k \cdot o}, \quad \text{или} \quad C = a.$$

Подставляя в общее решение, получим частное решение задачи:

$$x = ae^{kt}. \tag{4}$$

Коэффициент пропорциональности определяем из данных дополнительных условий: при $t=1$ час $x=2a$.

Отсюда: $2a = ae^{k \cdot 1}$, или $e^k = 2$.

Подставляя в частное решение (4), получим закон рассматриваемого процесса:

$$x = a2^t.$$

При $t=3$ часа, $x=8a$. Следовательно, количество фермента спустя 3 часа увеличится в 8 раз.

Задача 31. *Предположим, что скорость прироста населения прямо пропорциональна количеству населения. Найти зависимость между количеством населения A и временем t, если известно, что в некоторый момент, принимаемый нами за начальный, количество населения равнялось A_0, а через год оно увеличилось на $a\%$. Вычислить также:*

а) *предполагаемое на этой основе количество населения СССР на 1 апреля 1975 и 1 апреля 2000 года, если известно, что 1 апреля 1961 года оно составляло 217,1 млн. чел., а годовой прирост за 1960 год составил 1,71%;*

б) *предполагаемое на этой основе население Москвы (без пригородов) на 1 апреля 2000 года, если известно, что 1 апреля 1961 года оно составляло 6,234 млн. чел. Годовой прирост принять равным 1,7%.*

Решение.

Скорость изменения количества населения есть первая производная от количества населения по времени, т. е. $\frac{dA}{dt}$.

На основании условия задачи можно написать следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dA}{dt}=kA.$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dA}{A}=kdt.$$

Интегрируя почленно это простое выражение, найдем общее решение уравнения:

$$\ln A=\ln e^{kt+c_1},$$

или, потенцируя,

$$A=e^{kt}\cdot e^{c_1}=Ce^{kt}. \tag{1}$$

Количество населения через год определится следующим образом: годовой прирост $a\%$ от A_0 составит $\frac{aA_0}{100}$, количество населения через год

$$A_0+\frac{aA_0}{100}=\frac{(100+a)\,A_0}{100}.$$

Подставляя в общее решение (1) соответствующие значения количества населения и времени, а именно $A=A_0$ и $t=0$, определим постоянную интегрирования C.

Итак, $A_0=C\cdot e^{k\cdot 0}=Ce^0$;

$$C=A_0.$$

Таким образом, решение уравнения (1) принимает теперь вид:

$$A=A_0e^{kt}. \tag{2}$$

Для вычисления множителя e^k используем дополнительные данные, подставляя значения количества населения через год, т. е. при $t=1$, $A=\frac{(100+a)\,A_0}{100}$, в уравнение (2).

Имеем:

$$\frac{(100+a)A_0}{100}=A_0e^{k\cdot 1}=A_0e^k$$

и

$$e^k=\frac{100+a}{100}. \tag{3}$$

Подставляя найденное значение (3) в уравнение (2), получим нужное нам частное решение:

$$A=A_0\left(\frac{100+a}{100}\right)^t, \tag{4}$$

выражающее зависимость между количеством населения и временем в соответствии с условиями задачи. Пользуясь формулой (4), вычислим:

а) количество населения СССР согласно условию задачи на 1 апреля 1975 года (через $t=14$ лет):

$$A_{1975}=217{,}1\left(\frac{101{,}71}{100}\right)^{14}\cong 275 \text{ млн. (человек)};$$

на 1 апреля 2000 года (через $t=39$ лет):

$$A_{2000}=217{,}1\left(\frac{101{,}71}{100}\right)^{39}\cong 420 \text{ млн. (человек)};$$

б) количество населения Москвы на 1 апреля 2000 года (при принятых допущениях):

$$A_{2000}=6{,}234\left(\frac{101{,}7}{100}\right)^{39}\cong 12{,}01 \text{ млн. (человек)}.$$

§ 3. Однородные и линейные уравнения

1. Геометрия

Задача 32. *Найти изогональные траектории пучка прямых с центром в начале координат.*

Решение

Изогональными траекториями будут служить кривые, образующие в каждой своей точке постоянный угол α с проходящей через эту точку прямой пучка (рис. 21).

Пусть уравнение данного пучка будет $y=ax$, положим $\operatorname{tg}\alpha=k$.

Обозначим текущие координаты точки траектории через (x, y); угловой коэффициент касательной к траектории в этой точке будет тогда $\frac{dy}{dx}$.

По условию имеем:

$$k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{dy}{dx}-a}{1+\frac{dy}{dx}a}.$$

В любой точке (x, y) всегда $a=\frac{y}{x}$ (из уравнения пучка). Поэтому

$$k=\frac{\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx}},$$

или

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+kx}{x-ky}. \qquad (1)$$

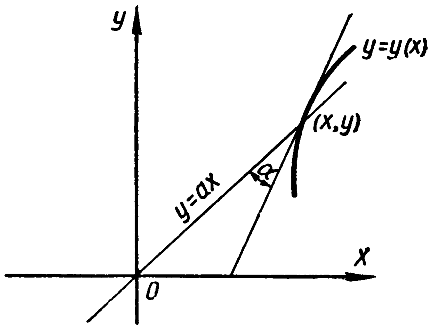

Рис. 21

Уравнение (1) является однородным уравнением и для его решения применим подстановку:

откуда
$$\left.\begin{aligned} y&=ux,\\ dy&=udx+xdu.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Подставляя выражения (2) в (1), получаем:

$$xdu-ku^2\,dx-kxudu-kdx=0,$$

или после группировки членов:

$$x(1-ku)\,du-k(1+u^2)\,dx=0. \qquad (3)$$

В уравнении (3) разделяем переменные:

$$\frac{1}{k}\cdot\frac{1-ku}{1+u^2}\,du-\frac{dx}{x}=0.$$

Интегрируем:

$$\frac{1}{k}\left[\int\frac{du}{1+u^2}-\frac{k}{2}\int\frac{d(1+u^2)}{1+u^2}\right]-\int\frac{dx}{x}=0,$$

или

$$\frac{1}{k}\operatorname{arctg}u+\ln C=\ln x+\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln x\sqrt{1+u^2}. \qquad (4)$$

Учитывая, что $u=\frac{y}{x}$ и $\ln e=1$, придаем уравнению (4) вид:

$$\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\ln C,$$

или

$$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}.$$

Переходя в последнем уравнении к полярным координатам, т. е. полагая $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, находим, что искомыми изогональными траекториями служат логарифмические спирали:

$$r=Ce^{\frac{\varphi}{k}}.$$

2. Электротехника

Задача 33. *В цепи поддерживается напряжение $E=300$ вольт. Сопротивление цепи $R=150$ ом. Коэффициент самоиндукции $L=30$ генри. За какое время с момента замыкания цепи возникающий в ней ток i достигнет 99% своей предельной величины?*

Решение

Электродвижущая сила самоиндукции пропорциональна скорости нарастания силы тока. Коэффициентом пропорциональности служит коэффициент L самоиндукции цепи.

В процессе замыкания цепи в ней действуют две прямо противоположные электродвижущие силы: напряжение цепи E и электродвижущая сила самоиндукции $E_1=-L\frac{di}{dt}$.

Алгебраическая сумма этих электродвижущих сил равна:

$$V=E-L\frac{di}{dt}.$$

По закону Ома сила тока i в цепи будет:

$$i=\frac{V}{R},$$

или

$$i=\frac{E-L\frac{di}{dt}}{R}. \qquad (1)$$

Преобразуем последнее равенство:

$$Ri=E-L\frac{di}{dt},$$

или

$$Ri\,dt=Edt-Ldi,$$

откуда

$$Ldi=(E-Ri)dt \quad \text{и} \quad dt=\frac{Ldi}{E-Ri}. \qquad (2)$$

Интегрируя равенство (2), имеем:

$$t=L\int\frac{di}{E-Ri}=-\frac{L}{R}\int\frac{d(E-Ri)}{E-Ri},$$

или

$$t=-\frac{L}{R}\ln(E-Ri)+C.$$

Начальное условие при $t=0$, $i=0$ дает:

$$0=-\frac{L}{R}\ln(E-R\cdot 0)+C,$$

откуда

$$C=\frac{L}{R}\ln E.$$

Таким образом, закон процесса выражается зависимостью:

$$t=\frac{L}{R}\ln\frac{E}{E-Ri}. \tag{3}$$

Так как предельным значением i будет $I=\frac{E}{R}$, то по условию задачи $i=0{,}99\frac{E}{R}$, и поэтому искомое время равно:

$$t=\frac{L}{R}\ln\frac{E}{E-0{,}99E}=\frac{L}{R}\ln 100. \tag{4}$$

Подставляя в (4) числовые значения L и R, окончательно получим:

$$t=\frac{30}{150}\cdot\ln 100\cong 0{,}92\ \textit{сек}.$$

Задача 34. *Конденсатор емкостью c включается в цепь с напряжением E и сопротивлением R. Определить заряд q конденсатора в момент t после включения.*

Решение

В момент t заряд конденсатора q и сила тока $i=\frac{dq}{dt}$. К этому же моменту t в цепи действует электродвижущая сила V, равная разности между напряжением цепи E и напряжением конденсатора $\frac{q}{c}$, т. е.

$$V=E-\frac{q}{c}.$$

По закону Ома сила тока $i=\frac{V}{R}$, или, иначе,

$$\frac{dq}{dt}=\frac{E-\frac{q}{c}}{R}.$$

Тогда дифференциальное уравнение процесса примет вид:

$$R\frac{dq}{dt}=E-\frac{q}{c}. \tag{1}$$

Интегрируя линейное уравнение (1), получим его общее решение:

$$q=cE-C_1e^{-\frac{t}{cR}}.$$

Согласно данным начальных условий, при $t=0$ $q=0$, откуда

$$0=cE-C_1 e^{\frac{0}{cR}}$$

и

$$C_1=cE.$$

Таким образом, закон рассматриваемого процесса описывается равенством:

$$q=cE\left(1-e^{-\frac{t}{cR}}\right).$$

Задача 35. *В цепи с сопротивлением R и самоиндукцией L действует периодическая электродвижущая сила $E_1=a\sin\frac{2\pi}{T}\cdot t$ (где T — период, t — время, a — постоянное число, равное, очевидно, максимальному значению величины E_1). Определить силу тока i в цепи в любой момент времени, если в начальный момент ($t=0$) сила тока равна нулю.*

Решение

Кроме электродвижущей силы E_1, в цепи действует еще противоположная электродвижущая сила самоиндукции, равная $L\frac{di}{dt}$.

В цепи действуют две силы: электродвижущая сила

$$E_1=a\sin\frac{2\pi}{T}t$$

и противоположная ей электродвижущая сила индукции

$$E_2=-L\frac{di}{dt}.$$

Общая электродвижущая сила равна:

$$E=E_1+E_2=a\sin\frac{2\pi}{T}t-L\frac{di}{dt}.$$

По закону Ома сила тока в цепи равна:

$$i=\frac{E}{R}.$$

Таким образом,

$$i=\frac{a\sin\frac{2\pi}{T}t-L\frac{di}{dt}}{R}.$$

Обозначая для краткости $\frac{2\pi}{T}=k$, получим дифференциальное уравнение процесса:

$$L\frac{di}{dt}+Ri=a\sin kt. \qquad (1)$$

Уравнение (1) является неоднородным линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка.

Решаем соответствующее однородное уравнение:

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=0, \quad \text{или} \quad \frac{di}{i}=-\frac{R}{L}dt.$$

Интегрируем:

$$\int\frac{di}{i}=-\frac{R}{L}\int dt,$$

откуда

$$\ln i=-\frac{R}{L}t+\ln C.$$

Потенцируя обе части равенства, получим:

$$i=Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Частное решение неоднородного уравнения (1) ищем в виде:

$$i_{\text{частн}}=A\sin kt+B\cos kt. \tag{2}$$

Коэффициенты A и B подлежат определению. Дифференцируем равенство (2), считая A и B постоянными:

$$\frac{di_{\text{частн}}}{dt}=Ak\cos kt-Bk\sin kt. \tag{3}$$

Подставляя значения (3) и (2) в уравнение (1), после очевидных алгебраических преобразований имеем:

$$\left(A\frac{R}{L}-Bk\right)\sin kt+\left(Ak+B\frac{R}{L}\right)\cos kt=\frac{a}{L}\sin kt.$$

Приравнивая коэффициенты обеих частей этого тождества, получаем систему:

$$\begin{cases} A\frac{R}{L}-Bk=\frac{a}{L}, \\ Ak+B\frac{R}{L}=0. \end{cases} \tag{4}$$

Решая систему (4) относительно неизвестных A и B, получим:

$$A=\frac{aR}{k^2L^2+R^2}, \quad B=-\frac{akL}{k^2L^2+R^2}.$$

Итак, частное решение согласно (2):

$$i_{\text{частн}}=\frac{aR}{kL^2+R^2}\sin kt-\frac{akL}{k^2L^2+R^2}\cos kt.$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (1) будет:

$$i=Ce^{-\frac{R}{L}t}+\frac{aR}{k^2L^2+R^2}\sin kt-\frac{akL}{k^2L^2+R^2}\cos kt. \tag{5}$$

Постоянную интегрирования C определим из начальных условий: при $t=0$ $i=0$, отсюда

$$0=Ce^{-\frac{R}{L}\cdot 0}+\frac{aR}{k^2L^2+R^2}\sin k\cdot 0-\frac{akL}{k^2L^2+R^2}\cos k\cdot 0$$

и

$$C=\frac{akL}{k^2L^2+R^2}. \tag{6}$$

Подставляя выражение (6) в общее решение (5), окончательно получим:

$$i=\frac{a}{k^2L^2+R^2}\left(kLe^{-\frac{Rt}{L}}+R\sin kt-kl\cos kt\right).$$

§ 4. Системы дифференциальных уравнений первого порядка

Задача 36. Некоторое вещество A разлагается на два вещества P и Q. Скорость образования каждого из этих веществ пропорциональна количеству неразложенного вещества. Пусть x и y — количества вещества P и Q, образовавшихся к моменту t. Определить закон их изменений, зная, что в начальный момент $x=0$, $y=0$, а через 1 час $x=\frac{3}{8}c$, $y=\frac{1}{8}c$, где c — первоначальное количество вещества A.

Решение

В момент t скорости образования вещества P и Q будут:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=k_1(c-x-y),\\ \frac{dy}{dt}&=k_2(c-x-y),\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

так как к этому моменту количество неразложившегося еще вещества A равно $c-x-y$. Уравнения (1) представляют систему двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Дифференцируя первое уравнение, получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k_1\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right). \tag{2}$$

Подставляя в уравнение (2) значение $\frac{dy}{dt}$ из второго уравнения системы (1), получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k_1\left[\frac{dx}{dt}+k_2(c-x-y)\right]. \tag{3}$$

Исключая y из уравнения (3) и первого уравнения системы (1), находим:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+(k_1+k_2)\frac{dx}{dt}=0. \tag{4}$$

Уравнение (4) является однородным линейным уравнением 2-го порядка. Его характеристическое уравнение:

$$r^2+(k_1+k_2)r=0.$$

Это неполное квадратное уравнение имеет два корня:

$$r_1=0 \text{ и } r_2=-(k_1+k_2).$$

Таким образом, общее решение уравнения (4) составляем в виде:

$$x=C_1+C_2e^{-(k_1+k_2)t}. \tag{5}$$

Для нахождения второго решения дифференцируем найденное выражение для x, подставляем x и $\frac{dx}{dt}$ в первое уравнение системы и решаем его относительно y.

Получим:

$$\frac{dx}{dt}=-C_2(k_1+k_2)e^{-(k_1+k_2)t},$$

$$-C_2(k_1+k_2)e^{-(k_1+k_2)t}=k_1(c-C_1-C_2e^{-(k_1+k_2)t}-y)$$

и окончательно второе решение:

$$y=c-\frac{k_2}{k_1}C_2e^{-(k_1+k_2)t}-C_1. \tag{6}$$

Таким образом, решения нашей системы:

$$\left.\begin{aligned} x&=C_1+C_2e^{-(k_1+k_2)t},\\ y&=c+\frac{k_2}{k_1}C_2e^{-(k_1+k_2)t}-C_1. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Определим C_1 и C_2, используя начальные условия: при $t=0$, $x=0$ и $y=0$.

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} C_1+C_2&=0,\\ C_1-\frac{k_2}{k_1}C_2&=C, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} C_1&=\frac{k_1c}{k_1+k_2},\\ C_2&=-\frac{k_1c}{k_1+k_2}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Подставляя значения (9) в наши решения, получим законы изменения величин x и y в виде:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{k_1c}{k_1+k_2}[1-e^{-(k_1+k_2)t}],\\ y&=\frac{k_2c}{k_1+k_2}[1-e^{-(k_1+k_2)t}]. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Неизвестные коэффициенты k_1 и k_2 найдем из дополнительных условий задачи: при $t=1$, $x=\frac{3}{8}c$, $y=\frac{1}{8}c$.

Имеем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{3c}{8} &= \frac{k_1 c}{k_1+k_2}\left[1-e^{-(k_1+k_2)}\right], \\ \frac{c}{8} &= \frac{k_2 c}{k_1+k_2}\left[1-e^{-(k_1+k_2)}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Из системы (11) определяем k_1 и k_2:

$$\frac{k_1}{k_2}=3; \quad k_1=3k_2$$

и тогда

$$\frac{c}{8}=\frac{c}{4}\left(1-e^{-4k_2}\right),$$

или

$$e^{-4k_2}=\frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$4\,k_2=\ln 2,$$

или

$$k_2=\frac{1}{4}\ln 2. \qquad (12)$$

Легко находим k_1:

$$k_1=\frac{3}{4}\ln 2. \qquad (13)$$

Суммируя уравнения (12) и (13), имеем:

$$k_1+k_2=\ln 2,$$

или, потенцируя,

$$e^{k_1+k_2}=2.$$

Тогда

$$\frac{k_1}{k_1+k_2}=\frac{3}{4},$$

а

$$\frac{k_2}{k_1+k_2}=\frac{1}{4}.$$

Подставляя эти значения в равенство (10), окончательно находим:

$$x=\frac{3c}{4}\left(1-2^{-t}\right)=\frac{3c}{4}\left(1-\frac{1}{2^t}\right),$$

$$y=\frac{c}{4}\left(1-2^{-t}\right)=\frac{c}{4}\left(1-\frac{1}{2^t}\right).$$

Глава 2

ПРОЦЕССЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Уравнения, разрешенные относительно второй производной $y''=\text{const}$

1. Теоретическая механика

Задача 37. *По наклонной плоскости длиной $l=10$ м скользит тело A (рис. 22). Угол наклона плоскости $\alpha=45°$. Коэффициент трения тела по поверхности плоскости $k=0{,}5$. Определить закон движения тела и время, в течение которого тело пройдет вдоль всей наклонной плоскости, если в начальный момент оно находилось в покое на верхней грани наклонной плоскости.*

Решение

В любой момент t на тело действуют три силы: вес P, сила трения F и реакция плоскости N_1. Нормальная и тангенциальная составляющие N и T силы P равны:

$$N=P\cos\alpha,$$
$$T=P\sin\alpha.$$

Как известно из курса теоретической механики, сила трения

$$F=-kN=-kP\cos\alpha.$$

Действующие силы P, F, N_1 заменяем эквивалентной системой сил T и F (так как силы N и N_1 взаимно уравновешиваются, а система сил T, N эквивалентна силе P).

Равнодействующая эквивалентной системы

$$R=T+F,$$

или $R=P\sin\alpha-kP\cos\alpha$, действует по направлению движения.

С другой стороны,

$$P = mg,$$
$$R = m\frac{d^2s}{dt^2},$$

откуда получаем дифференциальное уравнение движения:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g(\sin\alpha - k\cos\alpha). \qquad (1)$$

Это уравнение типа $y'' = C$.

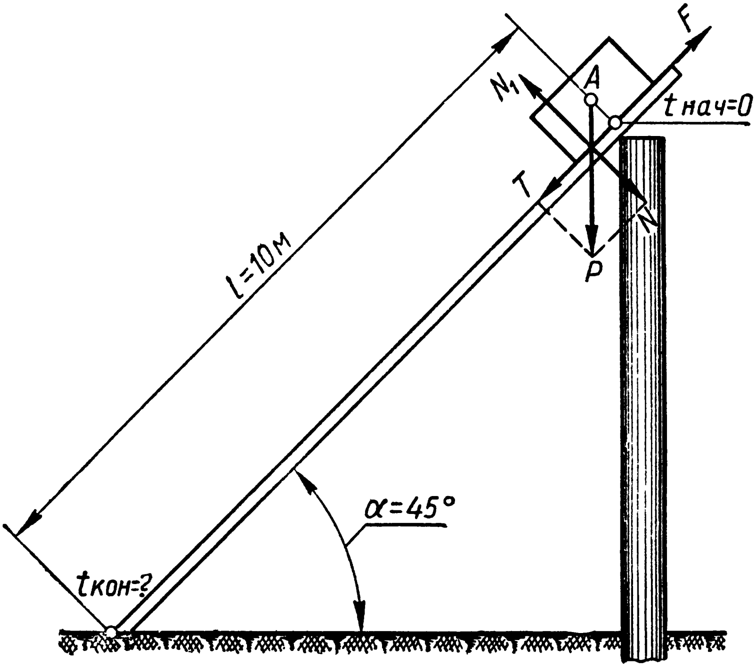

Рис. 22

Решая его непосредственным интегрированием, получаем:

$$\frac{ds}{dt} = g(\sin\alpha - k\cos\alpha)\,t + C_1$$

и общее решение

$$s = \frac{g}{2}(\sin\alpha - k\cos\alpha)\,t^2 + C_1 t + C_2. \qquad (2)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем из начальных условий: при $t = 0$, $s = 0$ и $\frac{ds}{dt} = 0$, что и дает систему:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= g(\sin\alpha - k\cos\alpha)\cdot 0 + C_1, \\ 0 &= \frac{g}{2}(\sin\alpha - k\cos\alpha)\cdot 0 + C_1\cdot 0 + C_2, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$C_1=C_2=0.$$

Подставляя эти значения в общее решение, получим решение задачи, выражающее искомый закон движения:

$$s=\frac{g}{2}(\sin\alpha-k\cos\alpha)\,t^2. \qquad (3)$$

Подставляя в уравнение (3) числовые данные задачи, получим искомый закон движения $s=f(t)$:

$$s=\frac{g}{2}(\sin 45^\circ-0{,}5\cos 45^\circ)\,t^2=\frac{g\sqrt{2}}{8}\,t^2. \qquad (4)$$

Для определения времени прохождения тела вдоль плоскости решаем уравнение (4) относительно t.

Получим:

$$t=2\sqrt{\frac{s\sqrt{2}}{g}}. \qquad (5)$$

Подставляя $s=l=10$ *м*, получим искомое время соскальзывания тела:

$$t=2\sqrt{\frac{l\sqrt{2}}{g}}=2\sqrt{\frac{10\sqrt{2}}{9{,}81}}=2{,}4 \text{ сек.}$$

Задача 38. *Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Определить закон движения, считая от его положения в начальный момент и предполагая, что оно движется только под влиянием силы тяжести.*

Решение

Как известно, под влиянием силы тяжести тело движется с постоянным ускорением, равным g. Ввиду того что ускорение выражается производной второго порядка от пути по времени, дифференциальное уравнение (после сокращения на массу) в данном случае будет:

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-g. \qquad (1)$$

Интегрируя его дважды, получим:

$$\frac{ds}{dt}=-gt+C_1, \qquad (2)$$

$$s=\int(-gt+C_1)\,dt=-\frac{gt^2}{2}+C_1t+C_2. \qquad (3)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем из начальных условий.

Так как отсчет пути ведется от начального момента, то при $t=0$, $s=0$ и, следовательно, $C_2=0$.

Так как при $t=0$ начальная скорость $v_0=\frac{ds}{dt}$, то из уравнения (2) получаем:

$$C_1=v_0.$$

Итак, зависимость пройденного телом пути s от времени t представляется формулой:

$$s=v_0t-\frac{gt^2}{2}.$$

2. Сопротивление материалов и строительная механика

Задача 39. *Расстояние между рельсами железнодорожного пути $c=1,6$ м. Наибольшая нагрузка от паровоза на каждый рельс составляет $P=9$ т. Поперечный брус железнодорожного моста лежит на двух фермах, расположенных на расстоянии l друг от друга. Момент инерции площади сечения бруса $J=45\,000$ см^4, модуль упругости $E=10^5$ кГ/см^2. Найти расстояние l между фермами из условия, чтобы допустимый прогиб поперечного бруса в середине равнялся 0,2 см.*

Решение

Нашей задачей является определение упругой линии балки и вычисления прогиба в ее середине. Мерой изгиба балки может служить кривизна ее упругой линии. В курсе сопротивления материалов выводится формула радиуса кривизны R упругой линии для балок любого сечения, которая имеет такой вид:

$$R=\frac{EJ}{M}, \tag{1}$$

где E — модуль упругости балки,
J — момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси *,
M — изгибающий момент для данного сечения, равный алгебраической сумме моментов относительно нейтральной оси всех внешних сил, приложенных к брусу с одной стороны сечения (справа или слева сечения).

Обычно изгибы балок чрезвычайно малы, и упругая линия мало отклоняется от оси абсцисс. Поэтому в любой ее точке угловой коэффициент касательной $\frac{dy}{dx}$ весьма мал и в известном

* Нейтральной осью данного сечения балки называется прямая пересечения нейтрального слоя с плоскостью данного сечения. Нейтральный слой — слой, в котором волокна балки не деформируются (не растягиваются и не сжимаются) под действием сил.

из дифференциального исчисления выражении для радиуса кривизны $R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ можно пренебречь величиной y'^2.

Отсюда на основании формулы (1) получаем дифференциальное уравнение упругой линии в упрощенном виде:

$$\frac{1}{y''}=\frac{EJ}{M},$$

или

$$y''=\frac{M}{EJ}. \tag{2}$$

Поперечный брус представляет собой балку на двух опорах A и B, нагруженную двумя сосредоточенными силами P, приложенными в точках D и E.

Реакции опор $N=P$.

Для любого сечения F на участке DE (рис. 23) изгибающий момент:

$$M=P(l-a-x)-P(l-x),$$

или

$$M=-Pa.$$

Дифференциальное уравнение упругой линии приобретает вид:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{Pa}{EJ}. \tag{3}$$

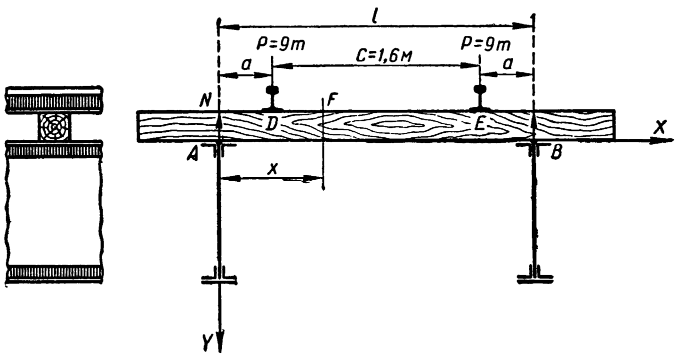

Рис. 23

Интегрируя уравнение (3), как уравнение типа $y''=\text{const}$, получим общее решение:

$$y=-\frac{Pa}{EJ}\left(\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2\right). \tag{4}$$

Из начальных условий $x=0$, $y=0$ и $x=l$, $y=0$ следует:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= -\frac{l}{2}, \\ C_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Подставляя выражение (3) в общее решение (2), получим уравнение упругой линии участка DE:

$$y=\frac{P\,ax}{2\,EJ}(l-x).$$

При $x=\frac{l}{2}$ получим прогиб середины поперечного бруса:

$$h=\frac{Pal^2}{8EJ}.$$

Так как $l=2a+c$,

то

$$h=\frac{P}{8\,EJ}a\,(2a+c)^2.$$

Преобразуя это кубическое уравнение, получим:

$$4a^3+4ca^2+c^2a-\frac{8\,EJh}{P}=0. \tag{6}$$

Подставляем числовые данные. Тогда уравнение (6) примет вид:

$$a^3+160a^2+6400a-200\,000=0.$$

Для упрощения вводим новую неизвестную $z=\frac{a}{10}$, или, иначе, $a=10z$. Тогда уравнение будет:

$$1000z^3+16\,000z^2+64\,000z-200\,000=0.$$

Сокращая на 1000, получим:

$$z^3+16z^2+64z-200=0. \tag{7}$$

Разлагаем левую часть последнего равенства на множители. Тогда уравнение (7) примет алгебраическую форму:

$$(z-2)(z^2+18z+100)=0. \tag{8}$$

Уравнение (8) имеет три корня: $z_1=2$ и два мнимых корня z_2 и z_3, которые не соответствуют физическому смыслу рассматриваемой задачи.

Таким образом,

$$a=10z=20\ \text{см},$$

и искомое расстояние между фермами:

$$l=2a+c=2\cdot 20+160=200\ \text{см}=2\ \text{м}.$$

§ 2. Неполные дифференциальные уравнения (специальные типы)

1. Сопротивление материалов и строительная механика

Задача 40. *Консольная стальная балка длиной $l=6$ м нагружена сосредоточенной силой $P=2$ т в конце B (рис. 24). Найти уравнение упругой линии (кривой изгиба) и определить величину прогиба конца балки (модуль упругости $E=2\,100\,000$ кГ/см², $J=30\,000$ см⁴).*

Решение

Определяем изгибающий момент M для сечения с центром в точке $N(x, y)$ (рис. 24). В данном случае M равно моменту силы P относительно точки N, взятому со знаком плюс (сила приложена к балке справа от сечения и вращает правую часть балки по часовой стрелке), т. е.

$$M=P(l-x). \tag{1}$$

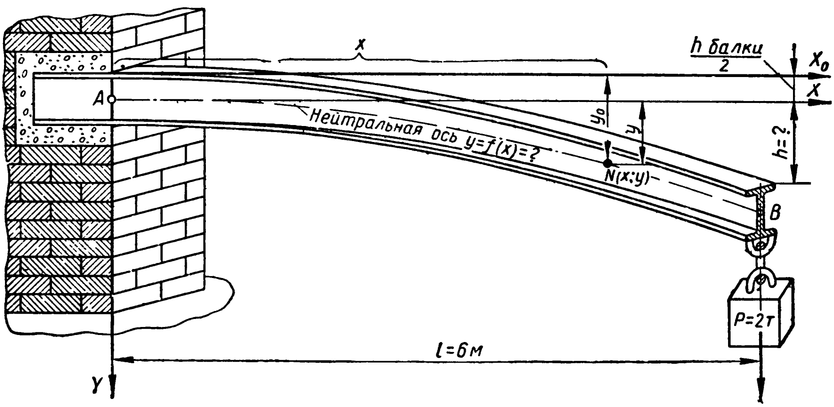

Рис. 24

Подставляя выражение (1) в уравнение (2), задачи 39, получаем дифференциальное уравнение упругой линии в виде:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{P}{EJ}(l-x). \tag{2}$$

Это уравнение второго порядка типа: $y''=f(x)$.

Решая его непосредственным двукратным интегрированием, соответственно получаем:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P}{EJ}\int(l-x)\cdot d(l-x)=-\frac{P}{EJ}\frac{(l-x)^2}{2}+C_1$$

Общее решение:

$$y=\frac{P}{EJ}\frac{(l-x)^3}{6}+C_1x+C_2. \qquad (3)$$

Константы C_1 и C_2 определяем из начального условия на заделанном конце $x=0$, $y=0$ и $\frac{dy}{dx}=0$, откуда имеем:

$$\left.\begin{aligned} 0&=\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{6}+C_1\cdot 0+C_2, \\ 0&=-\frac{P}{EJ}\frac{l^2}{2}+C_1. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Система уравнений (4) дает следующие значения неизвестных:

$$C_1=\frac{P}{EJ}\frac{l^2}{2}, \quad C_2=-\frac{P}{EJ}\frac{l^3}{6}.$$

Подставляя значения C_1 и C_2 в общее решение (3), получим искомое уравнение упругой линии:

$$y=\frac{P}{2EJ}\left(lx^2-\frac{x^3}{3}\right). \qquad (5)$$

Прогибом балки называется ордината упругой линии в рассматриваемом сечении. Величина прогиба h на конце балки B получается из уравнения (5), при $x=l$:

$$h=\frac{P}{2EJ}\left(l^3-\frac{l^3}{3}\right)=\frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Подставляя числовые значения и приводя их к единой размерности, получим прогиб:

$$h=\frac{2000\cdot 600^3}{3\cdot 2\,100\,000\cdot 30\,000}\cong 2{,}3 \text{ см}.$$

Задача 41. *Труба для стока воды выходит из стены на длину l. Внутренний диаметр трубы $d=16$ см. Толщина стенки 2 см. Чему должна равняться длина l, чтобы прогиб на конце трубы $h=0{,}5$ см? Удельный вес стали $\gamma=7{,}8$; модуль упругости $E=2\cdot 10^6$ кГ/см^2.*

Решение

Трубу можно рассматривать как консольную балку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой q. На элемент трубы $d\xi$ (рис. 25) действует элементарная нагрузка $qd\xi$.

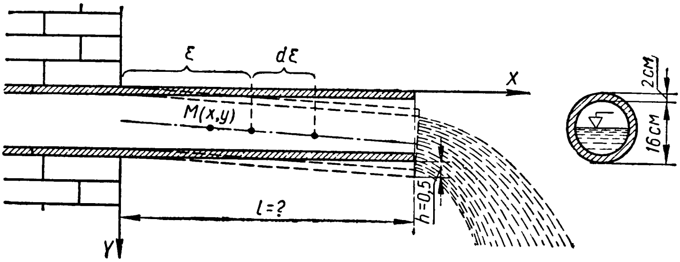

Рис. 25

Ее момент относительно точки N будет $q(\xi - x)\,d\xi$, откуда изгибающий момент:

$$M = \int_x^l q(\xi - x)\,d\xi = q\,\frac{(l-x)^2}{2}.$$

Подставляя его значение в дифференциальное уравнение упругой линии, получим это уравнение в виде:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{2EJ}(l-x)^2. \qquad (1)$$

Интегрируя уравнение (1), как уравнение типа $y'' = f(x)$, получим общее решение:

$$y = \frac{q}{24EJ}(l-x)^4 + C_1x + C_2. \qquad (2)$$

Из начальных условий имеем:
в заделанном конце балки $x=0$, $y=0$, $y'=0$, откуда

$$C_1 = \frac{ql^3}{6EJ}, \quad C_2 = -\frac{ql^4}{24EJ}. \qquad (3)$$

Подставляя значения (3) в общее решение (2), получим искомое уравнение упругой линии:

$$y = \frac{q}{24EJ}(6l^2x^2 - 4lx^3 + x^4). \qquad (4)$$

Прогиб на конце:

$$h = \frac{q}{24EJ}(6l^4 - 4l^4 + l^4) = \frac{ql^4}{8EJ}. \qquad (5)$$

Решая уравнение (5) относительно искомого l, получим:

$$l = \sqrt[4]{\frac{8EJh}{q}}.$$

Определяем нагрузку q и момент инерции J.

Пусть q_1 — вес 1 *см* трубы,

q_2 — вес воды на 1 *см* длины трубы.

Тогда общая нагрузка $q=q_1+q_2$.

Так как

$$q_1=\frac{\pi}{4}(20^2-16^2)\cdot 7{,}8=882\ Г/см,$$

$$q_2=\frac{\pi}{4}\cdot 16^2\cdot 1=201\ Г/см,$$

то

$$q=1083\ Г/см=1\ 083\ кГ/см.$$

Момент инерции круга относительно диаметра d равен $\frac{\pi d^4}{64}$. Таким образом, момент инерции J относительно нейтральной оси площади поперечного сечения трубы:

$$J=\frac{\pi}{64}(20^4-16^4)=4710\ см^4.$$

Подставляя найденные и данные величины в формулу (5), получим искомую длину трубы l:

$$l=\sqrt[4]{\frac{8\cdot 2\cdot 10^6\cdot 4710\cdot 0.5}{1{,}083}}=431\ см.$$

З а д а ч а 42. *Балка на двух опорах длиной l прогибается под действием равномерно распределенной нагрузки, общий вес которой равен P. Определить уравнение упругой линии и прогиб в середине пролета.*

Решение

Опорные реакции равны $+\frac{P}{2}$; на единицу длины приходится нагрузка $-\frac{P}{l}$.

Рассмотрим сечение C балки на расстоянии x от начала координат (рис. 26). Вправо от сечения сила $+\frac{P}{2}$ дает момент:

$$\left(\frac{l}{2}-x\right)\left(+\frac{P}{2}\right).$$

Момент относительно сечения C, создаваемый непрерывно распределенной нагрузкой, вычислим следующим образом.

Нагрузка на элемент длины балки $d\xi$ с абсциссой ξ имеет величину $-\frac{P}{l}d\xi$, а ее момент относительно сечения C будет

$-(\xi - x)\frac{P}{l}d\xi$. Полный момент всей нагрузки, соответствующей части балки CB, равен:

$$-\int_{x}^{\frac{l}{2}} (\xi - x)\frac{P}{l}d\xi.$$

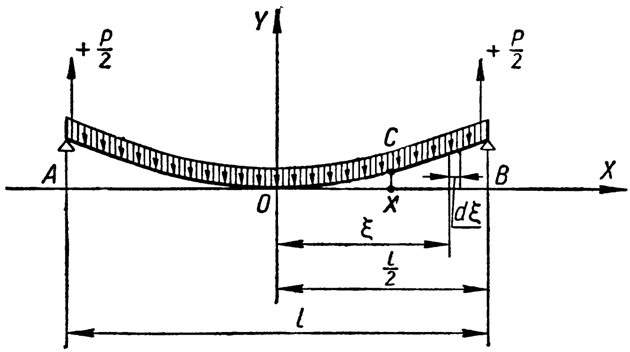

Рис. 26

Следовательно, суммарный момент:

$$M(x) = -\int_{x}^{\frac{l}{2}} (\xi - x)\frac{P}{l}d\xi + \left(\frac{l}{2} - x\right)\left(+\frac{P}{2}\right) = +\frac{P}{2}\left(\frac{l}{4} - \frac{x^2}{l}\right).$$

Как известно, дифференциальное уравнение изогнутой балки имеет вид:

$$y'' = \frac{M(x)}{EJ}, \tag{1}$$

где E — модуль упругости,
J — момент инерции.

Для нашего случая уравнение (1) переходит в равенство:

$$y'' = \frac{E}{2EJ}\left(\frac{l}{4} - \frac{x^2}{l}\right). \tag{2}$$

Начальные условия: при $x=0$, $y=0$ и $y'=0$.

Решая полученное уравнение (2) при данных начальных условиях, получаем:

$$y' = \frac{P}{2EJ}\int_0^x \left(\frac{l}{4} - \frac{x^2}{l}\right)dx = \frac{P}{2EJ}\left(\frac{lx}{4} - \frac{x^3}{3l}\right)$$

и общее решение

$$y = \frac{P}{2EJ}\left(\frac{lx^2}{8} - \frac{x^4}{12l}\right) = \frac{P}{48EJ}\left(3lx^2 - \frac{2x^1}{l}\right).$$

Стрела прогиба в середине пролета $\left(x=\frac{l}{2}\right)$ будет равна:

$$h=\frac{P}{48EJ}\left(3l\cdot\frac{l^2}{4}-\frac{2}{l}\cdot\frac{l^4}{16}\right)=\frac{5}{8}\,\frac{Pl^3}{48EJ}.$$

Задача 43. *Для любого сечения C изогнутого под давлением P рельса железнодорожного пути изгибающий момент при расчетах прочности пути задается формулой:*

$$M=P\sqrt[4]{\frac{EJ}{64k}}\cdot e^{-x\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}}\left(\cos x\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}-\sin x\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}\right),$$

где k — коэффициент жесткости упругого основания пути.

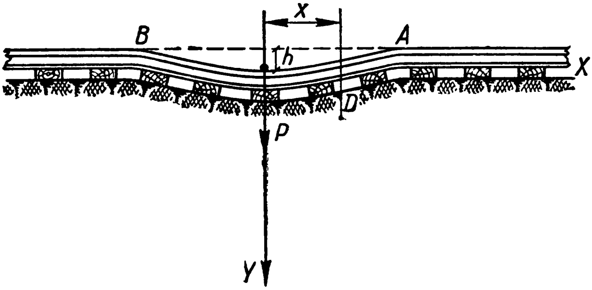

Рис. 27

Составить уравнение упругой линии и вычислить прогиб h рельса в точке приложения силы давления P (рис. 27), учитывая, что $y=0$ при $x=\frac{3}{4}\pi\sqrt[4]{\frac{4EJ}{k}}$ и $\frac{dy}{dx}=0$ при $x=0$.

Решение

Для удобства расчетов вводим сокращенные обозначения:

$$P\sqrt[4]{\frac{EJ}{64k}}=a \text{ и } \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}=b,$$

тогда уравнение упругой линии:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M(x)}{EJ},$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a}{EJ}e^{-bx}(\cos bx-\sin bx). \tag{1}$$

Интегрируя уравнение (1), получим:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{EJ}\left[\int e^{-bx}\cos bx\,dx-\int e^{-bx}\sin bx\,dx\right]. \tag{2}$$

Для вычисления правой части необходимо найти два интеграла:

$$\int e^{-bx} \cos bx\, dx \text{ и } \int e^{-bx} \sin bx\, dx,$$

которые находим двукратным применением формулы интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

1) Вычислим $\int e^{-bx} \cos bx\, dx$.

Пусть $u = e^{-bx}$, $du = -be^{-bx}\, dx$, $dv = \cos bx\, dx$, $v = \frac{1}{b} \sin bx$.

Тогда

$$\int e^{-bx} \cos bx\, dx = \frac{1}{b} e^{-bx} \sin bx + \int e^{-bx} \sin bx\, dx.$$

Полагая в крайнем правом интеграле повторно $u = e^{-bx}$, $dv = \sin bx\, dx$,

находим: $du = -be^{-bx}\, dx$, $v = -\frac{1}{b} \cos bx$

и

$$\int e^{-bx} \cos bx\, dx = \frac{1}{b} e^{-bx} \sin bx - \frac{1}{b} e^{-bx} \cos bx - \int e^{-bx} \cos bx\, dx,$$

или

$$2\int e^{-bx} \cos bx\, dx = \frac{1}{b} e^{-bx} (\sin bx - \cos bx),$$

откуда искомый интеграл

$$\int e^{-bx} \cos bx\, dx = \frac{e^{-bx}}{2b} (\sin bx - \cos bx).$$

2) Вычислим $\int e^{-bx} \sin bx\, dx$.

Пусть $u = e^{-bx}$, $dv = \sin bx\, dx$.

Тогда $du = -be^{-bx}\, dx$, $v = -\frac{1}{b} \cos bx$.

Следовательно,

$$\int e^{-bx} \sin bx\, dx = -\frac{1}{b} e^{-bx} \cos bx - \int e^{-bx} \cos bx\, dx.$$

Но крайний правый интеграл уже вычислен.
Таким образом, подставляя его значение, получаем:

$$\int e^{-bx} \sin bx\, dx = -\frac{e^{-bx}}{b} \cos bx - \frac{e^{-bx}}{2b} (\sin bx - \cos bx).$$

Следовательно, возвращаясь к уравнению (2), имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{bEJ} e^{-bx} \sin bx + C_1. \qquad (3)$$

Так как при $x=0$ $\frac{dy}{dx}=0$, то

$$0=\frac{a}{bEJ}\,e^{-b\cdot 0}\sin b\cdot 0+C_1$$

и

$$C_1=0.$$

Таким образом, первый интеграл равен:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{bEJ}\,e^{-bx}\sin bx.$$

Интегрируя вторично, получим второй интеграл:

$$y=-\frac{a}{2b^2EJ}\,e^{-bx}(\sin bx+\cos bx)+C_2. \tag{4}$$

Так как при

$$x=\frac{3}{4}\pi\sqrt[4]{\frac{4EJ}{k}}=\frac{3\pi}{4b} \qquad y=0,$$

то

$$0=-\frac{a}{2b^2EJ}\,e^{-b\cdot\frac{3\pi}{4b}}\left(\sin b\cdot\frac{3\pi}{4b}+\cos b\cdot\frac{3\pi}{4b}\right)+C_2$$

и

$$C_2=0.$$

Уравнение упругой линии примет вид:

$$y=-\frac{a}{2b^2EJ}\,e^{-bx}(\sin bx+\cos bx),$$

или, возвращаясь к данным величинам,

$$y=-\frac{P}{\sqrt[4]{64EJk^3}}\,e^{-x\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}}\cdot\left(\cos x\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}+\sin x\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}\right)$$

и при $x=0$ получим абсолютную величину стрелы прогиба:

$$h=\frac{7}{\sqrt[4]{64EJk^3}}.$$

2. Теоретическая механика

Задача 44. *Вожатый трамвая, выключая постепенно реостат, увеличивает мощность вагонного двигателя таким образом, что сила тяги возрастает от нуля пропорционально времени, увеличиваясь на 120 кГ в течение каждой секунды.*

Найти кривую расстояний движений вагона при следующих данных: 1) вес вагона $P=10$ т; 2) сопротивление трения постоянно и равно 200 кГ; 3) начальная скорость равна нулю.

Решение

Центр тяжести вагона движется по горизонтальной прямой. Начало координат поместим в начальном положении центра тяжести вагона (рис. 28). Проектируя внешние силы, приложенные к вагону на ось абсцисс, получим две слагаемые: силу тяги, равную $120\,t$, и силу сопротивления, равную $200\,кГ$, где t — время с момента выключения реостата. На основании второго закона Ньютона получим дифференциальное уравнение движения вагона:

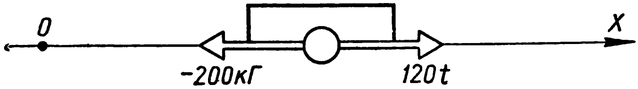

Рис. 28

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = 120\,t - 200. \tag{1}$$

Начало движения вагона не совпадает с моментом выключения реостата. Время t_0 соответствует началу движения и определяется из условия равенства силы тяги и силы сопротивления:

$$120t_0 = 200,$$

откуда

$$t_0 = \frac{5}{3}\ сек. \tag{2}$$

Для удобства вычислений величину $120t - 200$ обозначим через $120t_1$. Тогда

$$t_1 = t - \frac{200}{120} = t - \frac{5}{3}, \tag{3}$$

где t — время начала выключения реостата.

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\frac{P}{g} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} - 120\,t_1 = 0. \tag{4}$$

Интегрируя уравнение (4), получим:

$$\frac{dx}{dt_1} = \frac{120g}{P} \cdot \frac{t_1^2}{2} + C_1. \tag{5}$$

Определяем постоянную интегрирования C_1.

При $$t_1 = 0, \quad \frac{dx}{dt_1} = 0.$$

Получаем:

$$C_1 = 0. \tag{6}$$

Интегрируя теперь уравнение (5), находим общее решение уравнения (4):

$$x = \frac{120\,g}{P}\,\frac{t_1^3}{6} + C_2. \tag{7}$$

Определяем величину C_2. При $t_1=0$ $x=0$.
Следовательно,

$$C_2=0. \tag{8}$$

На основании равенства (7) находим интересующее нас решение уравнения движения вагона:

$$x=\frac{120\,g}{6P}\left(t-\frac{5}{3}\right)^3=\frac{120\cdot 9{,}81}{6\cdot 10\,000}\left(t-\frac{5}{3}\right)^3,$$

или окончательно $x=0{,}01962\left(t-\frac{5}{3}\right)^3$ (в *м*).

Задача 45. *Найти закон движения и определить период T математического маятника длины l, при малых отклонениях.*

Решение

Вес шарика M, равный P, разложим на две составляющие: N по направлению нити и f — по касательной к траектории. Сила N уравновешивается сопротивлением нити, и, таким образом, вся система сил эквивалентна силе f. Из рисунка 29 видно:

$$|f|=P\sin\alpha=mg\sin\alpha,$$

где m — масса, g — ускорение силы тяжести.

Так как для положительных углов α касательная составляющая f направлена в отрицательную сторону, то

$$f=-mg\sin\alpha\cong -mg\,\alpha,$$

так как при малых отклонениях нити $\sin\alpha\approx\alpha$.

Ввиду очевидного равенства $\alpha=\frac{s}{l}$ составляющая

$$f=-\frac{mg}{l}s.$$

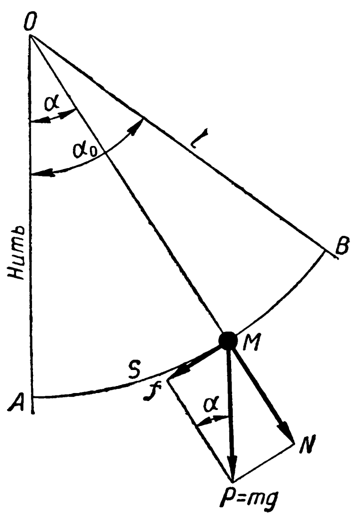

Рис. 29

Здесь $s=\overset{\frown}{AM}$ — длина пройденного шариком криволинейного пути. На основании второго закона динамики получим дифференциальное уравнение движения:

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=-\frac{mg}{l}s,$$

или

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{g}{l}s=0.$$

Интегрируя это неполное линейное уравнение второго порядка, получим общее решение:

$$s=C_1\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+C_2\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t.$$

Используем начальные условия:

$$\text{при } t=0,\ s=a \text{ и } \frac{ds}{dt}=0.$$

На основании этих условий находим C_1 и C_2. Получаем:

$$\left.\begin{aligned} C_1&=0,\\ C_2&=a. \end{aligned}\right\}$$

Подставляя эти значения в общее решение, получим:

$$s=a\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t,$$

где a — амплитуда колебания.

Движение рассматриваемого математического маятника представляет гармоническое колебание с периодом:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Задача 46. *Найти закон движения физического маятника (ось Oz перпендикулярна к плоскости чертежа).*

Решение

Как известно, физическим (или сложным) маятником называется твердое тело, вращающееся вокруг горизонтальной оси Oz под действием силы тяжести (рис. 30). Обозначим расстояние OC центра тяжести маятника от оси вращения через a и вес маятника через P, причем $P=Mg$. Так как в данном случае заданной силой является только сила P, то главный момент (сумма моментов всех сил системы) относительно оси Oz равен:

$$M_z=-Mga\sin\varphi, \qquad (1)$$

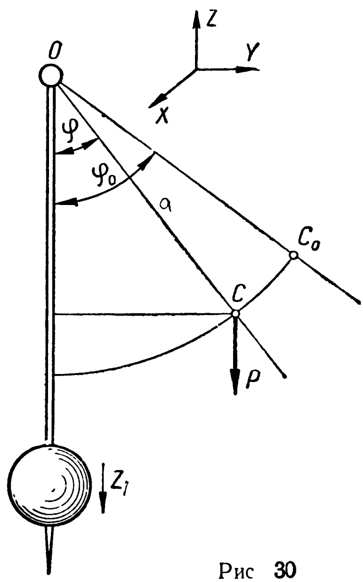

Рис 30

где φ — угол отклонения маятника от вертикали, отсчитываемый в направлении, обратном движению часовой стрелки.

Как известно из динамики, дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси выражается зависимостью:

$$J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z, \tag{2}$$

где J_z — момент инерции тела относительно оси вращения Oz. В нашем случае уравнение (2) примет вид:

$$J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Mga \sin\varphi. \tag{3}$$

Уравнение (3) представляет дифференциальное уравнение движения физического маятника.

При малых отклонениях маятника приближенно можно принять $\sin\varphi \approx \varphi$. Получим приближенное дифференциальное уравнение малых колебаний маятника:

$$J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Mga\,\varphi. \tag{4}$$

Пусть

$$\frac{Mga}{J_z} = k^2,$$

тогда

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2\varphi = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) представляет собой дифференциальное уравнение гармонических колебаний.

Интегрируем уравнение (5), предполагая, что начальная угловая скорость маятника равна нулю $\left(\omega_0 = \frac{d\varphi}{dt} = 0\right)$. Так как корнями соответствующего характеристического уравнения $r^2 + k^2 = 0$ являются мнимые числа $\pm ik$, то общее решение уравнения (5) выразится формулой:

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{6}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 вычисляем, используя начальные условия:

1) при $t=0$, $\varphi=\varphi_0$. Подставляя эти значения в равенство (6), получим:

$$\varphi_0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0$$

и

$$C_1 = \varphi_0.$$

2) При $t=0$ $\omega_0 = \frac{d\varphi}{dt} = 0$.

Так как

$$\frac{d\varphi}{dt} = -k\,C_1 \sin kt + k\,C_2 \cos kt,$$

то

$$-k\varphi_0\cdot 0+k\cdot C_2\cdot 1=0$$

и

$$C_2=0.$$

Подставляя найденные значения в уравнение (6), получим уравнение движения физического маятника при малых колебаниях:

$$\varphi=\varphi_0\cos kt.$$

Полный период колебаний T маятника равен:

$$T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{J_z}{Mga}}.$$

Задача 47. *Определить закон движения материальной частицы массы m под влиянием силы, направленной к центру O и прямо пропорциональной удалению x частицы от центра притяжения O (рис. 31).*

Примечание. Если на материальную частицу массы m действует центральная сила f, пропорциональная удалению x частицы от центра притяжения O, т. е. $f=-ax$, то такая сила называется восстанавливающей.

Решение

Восстанавливающая сила для рассматриваемой задачи равна:

$$f=-ax.$$

По второму закону динамики она выражается уравнением:

$$f=m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

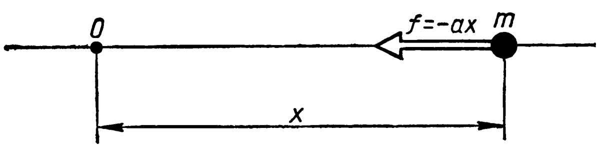

Рис. 31

Отсюда легко получить дифференциальное уравнение движения:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-ax,$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0, \qquad (1)$$

где величина $k^2=\frac{a}{m}$; здесь a — коэффициент восстановления, k — частота колебаний.

Это однородное линейное уравнение 2-го порядка. Соответствующее характеристическое уравнение

$$r^2+k^2=0$$

имеет корни:

$$r_{1,2}=\pm\sqrt{-k^2}=\pm ki.$$

Так как корни характеристического уравнения мнимые, то общее решение имеет вид:

$$x=C_1 \sin kt+C_2 \cos kt,$$

или

$$x=C_1\left(\sin kt+\frac{C_2}{C_1}\cos kt\right). \qquad (2)$$

Введем вспомогательный угол φ соотношением:

$$\frac{C_2}{C_1}=\operatorname{tg}\varphi.$$

Тогда

$$x=\frac{C_1}{\cos\varphi}(\cos\varphi\sin kt+\sin\varphi\cos kt),$$

или, обозначая

$$\frac{C_1}{\cos\varphi}=A,$$

$$x=A\sin(kt+\varphi). \qquad (3)$$

Выражение (3) представляет собой гармоническое колебание с амплитудой A и начальной фазой φ. Период колебания T найдем из формулы:

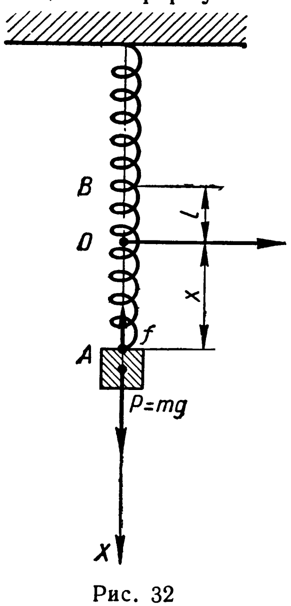

Рис. 32

$$k(t+T)+\varphi=kt+\varphi+2\pi$$

(2π — период синуса), откуда

$$T=\frac{2\pi}{k}$$

или

$$k=\frac{2\pi}{T}. \qquad (4)$$

Подставляя значение (4) в решение (3), окончательно получим:

$$x=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right).$$

Задача 48. *К вертикальной пружине, весом которой пренебрегаем, подвешен груз P, удлиняющий пружину на величину l (рис. 32). Оттянув затем груз еще на длину a вниз, ему предоставляют свободно двигаться.*

Найти закон этого движения, пренебрегая всеми побочными сопротивлениями.

Решение

Ось x направим вертикально вниз и начало O возьмем в том месте, где находился груз в положении статического равновесия. В любом положении $A(x)$ на груз действуют две силы:

1) вес груза $P = mg$,

2) упругая восстанавливающая сила пружины f.

По закону Гука при малых деформациях упругие силы пропорциональны соответствующим деформациям.

В точке O упругая сила равна весу P, а соответствущая деформация l.

Следовательно,

$$|P| = kl. \tag{1}$$

В точке A упругая сила f, соответствующая деформация равна $l+x$:

$$|f| = k(l+x). \tag{2}$$

Поделив почленно равенство (2) на равенство (1), получим:

$$\frac{|f|}{|P|} = \frac{l+x}{l},$$

откуда абсолютная величина силы f:

$$|f| = P + \frac{P}{l}x.$$

Так как при положительном x сила f действует в отрицательную сторону, ее надо считать силой отрицательной, а поэтому окончательно

$$f = -P - \frac{P}{l}x.$$

Равнодействующая обеих рассмотренных сил:

$$R = P + f,$$

или

$$R = -\frac{P}{l}x = -\frac{mg}{l}x.$$

На основании 2-го закона динамики получаем дифференциальное уравнение движения:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mg}{l}x,$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0. \tag{1}$$

Это неполное линейное уравнение второго порядка.

Интегрируя его, получим общее решение:

$$x=C_1 \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t+C_2 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t. \tag{2}$$

Используем начальные условия. В самом нижнем положении оттянутого груза имеем:

$$t=0, \quad x=a, \quad \frac{dx}{dt}=0.$$

На основании этих условий находим C_1 и C_2.

Получаем:

$$\left.\begin{aligned} C_1&=0, \\ C_2&=a. \end{aligned}\right\}$$

Подставляя эти значения в общее решение (2), получим закон гармонического колебания, описываемого уравнением:

$$x=a \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t$$

с периодом $T=2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Задача 49. *Найти закон движения материальной точки массы m по прямой OA (рис. 33) под действием отталкивающей силы, обратно пропорциональной третьей степени расстояния точки $x=OM$ от неподвижного центра O.*

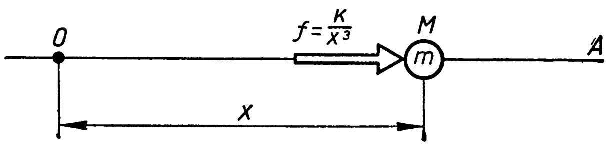

Рис. 33

Решение

Дифференциальное уравнение движения точки согласно второму закону динамики будет:

$$m \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{k}{x^3}, \tag{1}$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Уравнение (1) можно представить в форме:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{k}{m} \frac{1}{x^3}=a^2 \frac{1}{x^3},$$

или

$$x''=a^2 \frac{1}{x^3}.$$

Умножим обе части уравнения на $2x'\,dt$:

$$2x'\,x''\,dt = 2a^2 \frac{x'\,dt}{x^3}$$

Левая часть последнего равенства есть дифференциал от x'^2:

$$d\,(x'^2) = 2a^2 \frac{dx}{x^3} = a^2 d\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$

отсюда

$$x'^2 = a^2\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{C_1}\right) = \frac{a^2}{C_1}\frac{x^2 - C_1}{x^2},$$

или

$$x' = \pm\frac{a}{\sqrt{C_1}}\frac{\sqrt{x^2 - C_1}}{x}$$

и

$$\frac{dx}{dt} = \pm\frac{a}{\sqrt{C_1}}\frac{\sqrt{x^2 - C_1}}{x}.$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{xdx}{\sqrt{x^2 - C_1}} = \pm\frac{a}{\sqrt{C_1}}\,dt. \qquad (2)$$

Решая уравнение (2), придем к равенству:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2 - C_1}} = \pm\frac{a}{\sqrt{C_1}}\,(t + C_2).$$

Окончательно:

$$\sqrt{x^2 - C_1} = \pm\frac{a}{\sqrt{C_1}}\,(t + C_2),$$

или

$$x^2 - C_1 = \frac{a^2}{C_1}\,(t + C_2)^2.$$

Задача 50. *Цепь длиной $l = 4$ м соскальзывает с гладкого горизонтального стола. В начальный момент движения со стола свисал конец цепи длиной $a = 0{,}5$ м (рис. 34). Пренебрегая трением, найти время соскальзывания всей цепи со стола.*

Решение

В любой момент времени на цепь действует сила F, равная весу свесившейся со стола к этому моменту части цепи длиной x.

Обозначая вес всей цепи P, получим очевидную пропорцию:

$$\frac{F}{P} = \frac{x}{l},$$

откуда

$$F = \frac{P}{l}\,x = \frac{mg}{l}\,x, \qquad (1)$$

где m — масса.

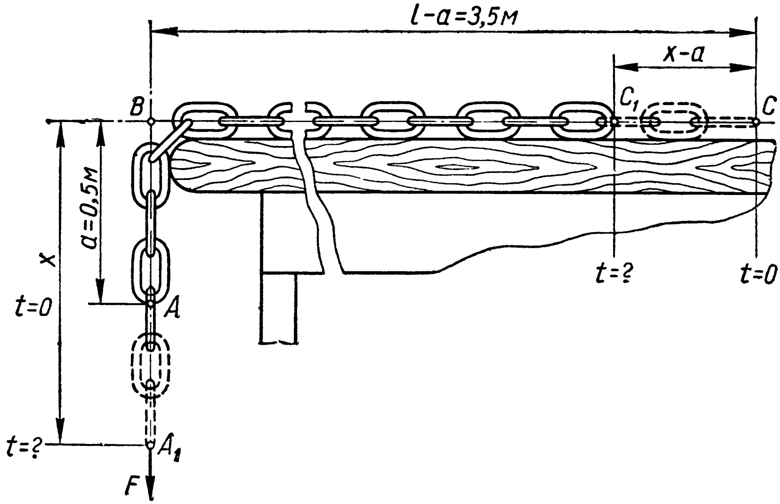

Рис. 34

На основании 2-го закона динамики

$$F=m\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{2}$$

Приравнивая (1) и (2), получаем дифференциальное уравнение движения цепи:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{mg}{l}x,$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{g}{l}x=0.$$

Подставляя числовые значения и принимая приближенно $g=10$ *м/сек*^{2}, получим неполное линейное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2{,}5x=0. \tag{3}$$

Соответствующее ему характеристическое уравнение

$$r^2-2{,}5=0$$

имеет корни:

$$r_1=\sqrt{\frac{5}{2}}; \quad r_2=-\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Общее решение принимает вид:

$$x=C_1e^{\sqrt{\frac{5}{2}}t}+C_2e^{-\sqrt{\frac{5}{2}}t}. \tag{4}$$

Определим произвольные постоянные C_1 и C_2 из данных начальных условий:

при

$$t=0 \quad x=a=0{,}5 \text{ м}, \quad v=\frac{dx}{dt}=0,$$

откуда

$$a=C_1e^0+C_2e^0=C_1+C_2, \tag{5}$$

и так как

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{5}{2}}C_1e^{\sqrt{\frac{5}{2}}t}-\sqrt{\frac{5}{2}}C_2e^{-\sqrt{\frac{5}{2}}t},$$

то

$$0=\sqrt{\frac{5}{2}}C_1e^0-\sqrt{\frac{5}{2}}C_2e^0. \tag{6}$$

Из системы уравнений (5) и (6) находим:

$$C_1=C_2=\frac{a}{2}=0{,}25.$$

Подставляя эти значения в общее решение, получим частное решение уравнения (4):

$$x=0{,}25\left(e^{\sqrt{\frac{5}{2}}t}+e^{-\sqrt{\frac{5}{2}}t}\right). \tag{7}$$

Решаем уравнение (7) относительно t:

$$e^{\sqrt{\frac{5}{2}}t}+e^{-\sqrt{\frac{5}{2}}t}=4x,$$

или

$$\frac{e^{2\sqrt{\frac{5}{2}}t}+1}{e^{\sqrt{\frac{5}{2}}t}}=4x.$$

Это выражение приводит нас к квадратному уравнению относительно $e^{\sqrt{\frac{5}{2}}t}$:

$$\left(e^{\sqrt{\frac{5}{2}}t}\right)^2-4xe^{\sqrt{\frac{5}{2}}t}+1=0.$$

Решая его, получим:

$$\left(e^{\sqrt{\frac{5}{2}}t}\right)_{1,2}=\frac{4x\pm\sqrt{16x^2-4}}{2}=2x\pm\sqrt{4x^2-1}. \tag{8}$$

В выражении (8) знак минус перед корнем отбрасывается, так как при $t>0$ $e^{\sqrt{\frac{5}{2}}t}>e^{-\sqrt{\frac{5}{2}}t}$.

Следовательно,

$$e^{\sqrt{\frac{5}{2}}t}=2x+\sqrt{4x^2-1},$$

откуда

$$t=\sqrt{\frac{5}{2}}\ln\left(2x+\sqrt{4x^2-1}\right)$$

и при $x=l=4$ *м* получим искомое время:

$$t=\sqrt{\frac{5}{2}}\ln(8+\sqrt{63})\cong 1{,}75\ сек.$$

Итак, в течение 1,75 *сек* вся цепь соскользнет с гладкого стола.

Задача 51. *Вагон весом $Q=9216$ кГ приходит в движение вследствие действия ветра, дующего по направлению полотна, и движется по горизонтальному участку пути (рис. 35). Сопротивление движению R вагона равно $^1/_{200}$ его веса. Сила давления ветра $P=kSu^2$ кГ, где S — площадь задней стенки вагона, подверженная давлению ветра и равная 6 м², и — скорость ветра относительно вагона, а $k=0{,}12\ \frac{кГ\cdot сек^2}{м^4}$. Абсолютная скорость ветра $\omega=12$ м/сек. Считая начальную скорость вагона равной нулю, определить:*

1) *наибольшую скорость вагона;*

2) *время T, которое потребовалось бы для достижения этой скорости;*

3) *путь x_1, который должен пройти вагон, чтобы приобрести скорость 3 м/сек.*

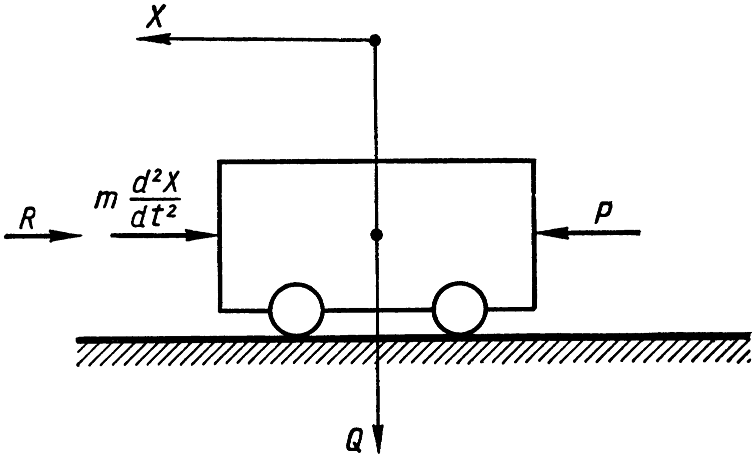

Рис. 35

Решение

Проектируя все действующие силы на горизонтальную ось, получаем уравнение равновесия рассматриваемой системы:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+R-P=0. \tag{1}$$

Скорость ветра относительно вагона равна:

$$u=\omega-\frac{dx}{dt},$$

или, дифференцируя, $\frac{du}{dt}=-\frac{d^2x}{dt^2}$. (2)

Подставляя значения сил в уравнение (1) и разделив его на m, получаем:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{Q}{m\cdot 200}-\frac{kSu^2}{m}=0. \quad (3)$$

Используя равенство (2), уравнение (3) приобретает вид:

$$-\frac{du}{dt}+\frac{g}{200}-\frac{kSu^2}{m}=0. \quad (4)$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$-\int\frac{du}{\frac{g}{200}\left(1-\frac{200\,kS}{mg}u^2\right)}=-t+C. \quad (5)$$

Для удобства вводим сокращение $\frac{200kS}{mg}=\alpha^2$.

Тогда из уравнения (5) получаем:

$$\frac{200}{\alpha g}\left[\frac{1}{2}\int\frac{-d(\alpha u)}{(\alpha u+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{d(\alpha u)}{(\alpha u-1)}\right]=-t+C,$$

или

$$\frac{100}{\alpha g}\ln\frac{\alpha u-1}{\alpha u+1}=-t+C.$$

Постоянную интегрирования в общем решении уравнения (4) определяем, используя начальные условия: при $t=0$; $\frac{dx}{dt}=0$; $u=\omega$.

Тогда

$$C=\frac{100}{\alpha g}\ln\frac{\alpha\omega-1}{\alpha\omega+1},$$

и искомое частное решение будет:

$$-t=\frac{100}{\alpha g}\ln\frac{(\alpha u-1)(\alpha\omega+1)}{(\alpha u+1)(\alpha\omega-1)},$$

откуда при $t=0$

$$\alpha=\sqrt{\frac{200kS}{mg}}=\frac{1}{8}.$$

1. Максимальная скорость вагона будет достигнута при $t\longrightarrow\infty$

Тогда

$$\alpha u-1=0,$$

$$\alpha\left(\omega-\frac{dx}{dt}\Big|_{\infty}\right)-1=0.$$

Отсюда

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\infty}=\omega-\frac{1}{\alpha}=\omega-\sqrt{\frac{mg}{200kS}}=12-\sqrt{\frac{9216}{200\cdot 0{,}12\cdot 6}}\,.$$

Таким образом, максимальная скорость вагона:

$$v_{\max}=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{\infty}=4\ \text{м/сек}.$$

2. Время, которое потребовалось бы для достижения этой скорости

$$T=\infty.$$

3. Путь x_1, который должен пройти вагон, чтобы приобрести скорость $\frac{dx}{dt}=3$ *м/сек*:

$$\frac{du}{dt}=\frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dt}=\frac{du}{d\xi}u,$$

$$\frac{d\xi}{dt}=u=\omega-\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{du}{dt}=-\frac{d^2x}{dt^2},$$

и, наконец, интегрируя предпоследнее равенство, путь

$$\xi=\omega t-x.$$

Таким образом, уравнение (4) примет вид:

$$-\frac{du}{d\xi}u+\frac{g}{200}-\frac{kSu^2}{m}=0.$$

Разделяя переменные, находим:

$$\frac{u\,du}{\frac{g}{200}-\frac{kSu^2}{m}}=d\xi,$$

или

$$\frac{200}{g}\cdot\frac{u\,du}{\left(1-\frac{kS200}{mg}u^2\right)}=d\xi. \tag{6}$$

Вводя предыдущее обозначение $\alpha^2=\frac{kS200}{mg}$ и интегрируя, приходим к равенству, представляющему общее решение уравнения (6):

$$-\frac{m}{2kS}\ln C\,(1-\alpha^2u^2)=\xi=\omega t-x.$$

Постоянную интегрирования C определяем из начальных условий: при $x=0$ $t=0$; $u=\omega$.
Тогда

$$C=\frac{1}{1-\alpha^2\omega^2}\,.$$

Искомое частное решение выразится зависимостью:

$$x = \omega t + \frac{m}{2kS} \ln \frac{1 - \alpha^2 u^2}{1 - \alpha^2 \omega^2}.$$

При $\qquad x = x_1, \ \frac{dx}{dt} = 3 \ м/сек, \ u = 9 \ м/сек,$

$$u - t = \frac{100}{\frac{1}{8} g} \cdot \ln \frac{1 \cdot 20}{17 \cdot 4} = 99{,}8 \ сек$$

имеем: $\qquad x_1 = 99{,}8 \cdot 12 + \frac{9216}{9{,}81 \cdot 0{,}12 \cdot 6} \ln \frac{0{,}265}{1{,}25} = 187 \ м.$

Задача 52. *Самолет на лыжах приземляется на горизонтальное поле; летчик подводит самолет к посадочной площадке без вертикальной скорости в момент приземления* (рис. 36). *Коэффициент трения лыж самолета о снег* $\mu = 0{,}08$. *Сила сопротивления воздуха движению самолета пропорциональна квадрату скорости. При скорости, равной* 1 *м/сек, горизонтальная составляющая силы сопротивления равна* $R_x = 0{,}09$ *кГ, а вертикальная составляющая, направленная вверх,* $R_Y = 0{,}7$ *кГ. Вес самолета равен* 2000 *кГ. Определить длину и время пробега самолета до остановки.*

Решение

Горизонтальная составляющая силы сопротивления:

$$R_x = k_x v^2, \quad где \quad k_x = 0{,}09 \ кГ \ \frac{сек^2}{м^2}.$$

Вертикальная составляющая силы сопротивления:

$$R_Y = k_Y v^2,$$

где

$$k_Y = 0{,}7 \ кГ \cdot \frac{сек^2}{м^2}.$$

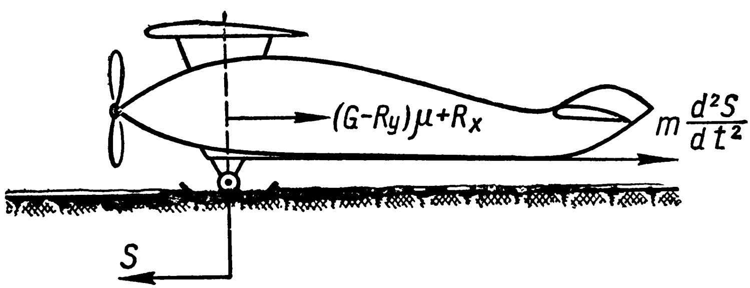

Рис. 36

Так как $v = \frac{ds}{dt}$, то горизонтальная и вертикальная составляющие соответственно равны:

$$R_x = k_x \left(\frac{ds}{dt} \right)^2,$$

$$R_Y = k_Y \left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Составляя дифференциальное уравнение движения самолета, получим:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} + R_x + \mu\,(mg - R_Y) = 0,$$

или

$$m\frac{d^2s}{dt^2} + k_x\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mu\left[mg - k_Y\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right] = 0. \qquad (1)$$

Делим уравнение (1) на m. Тогда дифференциальное уравнение задачи примет вид:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{k_x - \mu k_Y}{m}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mu g = 0 \qquad (2)$$

Вводим обозначения:

$$\frac{k_x - \mu k_Y}{m} = A;$$

$$\mu g = B.$$

Кроме того,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{ds}v.$$

Тогда уравнение (2) можно записать:

$$v\frac{dv}{ds} + Av^2 + B = 0. \qquad (3)$$

Разделив переменные, получаем дифференциальное уравнение:

$$-\frac{v\,dv}{B + Av^2} = ds. \qquad (4)$$

Интегрируя обе части равенства (4), получаем:

$$-\int\frac{v\,dv}{B + Av^2} = -\frac{1}{2A}\int\frac{d\,(B + Av^2)}{B + Av^2} = -\frac{1}{2A}\ln\,(B + Av^2) + C = s. \quad (4а)$$

Определяем постоянную интегрирования C, используя начальные условия: при $s=0$ $v=v_0$.
Тогда

$$C = \frac{1}{2A}\ln\,(B + Av_0^2),$$

и искомое частное решение выразится формулой:

$$-\frac{1}{2A}\ln\left(\frac{B + Av^2}{B + Av_0^2}\right) = s. \qquad (4б)$$

При скорости $v=0$ находим длину пробега самолета до остановки:

$$s\Big|_{v=0} = \frac{1}{2A}\ln\left(1 + \frac{A}{B}v_0^2\right) = \frac{1}{34\cdot 9{,}81}\cdot 10^6\ln\left(1 + \frac{34}{16}\cdot 10^{-4}\cdot 18{,}5^2\right) = 216\ м.$$

Время пробега определяем, используя уравнение (2) и соотношение $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt}$. Уравнение (2) принимает тогда вид:

$$\frac{dv}{dt}+Av^2+B=0. \qquad (5)$$

В уравнении (5) разделяем переменные:

$$\frac{dv}{Av^2+B}=-dt.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\sqrt{AB}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{A}{B}}\cdot v\right)=-t+T.$$

При $t=0$ $v=v_0$ и искомое время пробега:

$$T=\frac{1}{\sqrt{AB}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{A}{B}}\cdot v_0\right)=\frac{10^4}{g\sqrt{136}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{34}{16}}\cdot 10^{-2}\cdot 18{,}5\right)=$$
$$=22{,}5 \text{ сек}.$$

Задача 53. *Тело массой m падает с некоторой высоты со скоростью v. При падении тело испытывает сопротивление, пропорциональное квадрату скорости. Найти закон движения падающего тела.*

Решение

В момент времени t тело находится под действием двух сил: тяжести и сопротивления среды. Сила тяжести mg, сила сопротивления среды направлена в сторону, противоположную движению, и равна kv^2. Следовательно, равнодействующая этих сил равна $mg-kv^2$. С другой стороны, величина силы, действующей на тело, пропорциональна ускорению движения j и равна mj.

Итак,

$$mj=mg-kv^2. \qquad (1)$$

Если путь, считая от начала отсчета, равен s, то скорость $v=\frac{ds}{dt}$, и при прямолинейном движении $j=\frac{d^2s}{dt^2}$; равенство (1) принимает вид:

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \qquad (2)$$

Имеем: $\frac{ds}{dt}=v$, тогда $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{dv}{ds}v$.

Преобразуем уравнение (2):

$$m\frac{dv}{ds}v=mg-kv^2,$$

или

$$\frac{mv\,dv}{mg-kv^2}=ds,$$

откуда

$$\int \frac{mv\,dv}{mg-kv^2}=\int ds,$$

или

$$-\frac{m}{2k}\ln|mg-kv^2|+C=s. \qquad (3)$$

Пусть в начальный момент времени $t=0$ тело находилось в начале отсчета пути, т. е. $s=0$, и нáчало падать с начальной скоростью, равной нулю, т е. $v=0$.

Подставив в уравнение (3) $s=0$ и $v=0$, находим C:

$$-\frac{m}{2k}\ln mg+C=0, \qquad C=\frac{m}{2k}\ln mg.$$

Таким образом,

$$-\frac{m}{2k}\ln|mg-kv^2|+\frac{m}{2k}\ln mg=s.$$

или

$$s=\frac{m}{2k}\ln\left|\frac{mg}{mg-kv^2}\right|.$$

Так как

$$\frac{ds}{dt}=v,$$

то

$$s=\frac{m}{2k}\ln\left|\frac{mg}{mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}\right|. \qquad (4)$$

Уравнение (4) представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка. Решаем его относительно $\frac{ds}{dt}$:

$$\ln\left|\frac{mg}{mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}\right|=\frac{2ks}{m}.$$

Так как тело падает, то согласно уравнению (2) $m\frac{d^2s}{dt^2}>0$; следовательно,

$$mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2>0$$

и

$$\frac{mg}{mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}>0,$$

а потому имеем:

$$\frac{mg}{mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}=e^{\frac{2ks}{m}}, \qquad \frac{mg-k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{mg}=e^{-\frac{2ks}{m}},$$

$$\frac{ds}{dt}=\pm\sqrt{\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{2ks}{m}}\right)}.$$

Так как s возрастающая функция t, то $\frac{ds}{dt}>0$, поэтому перед корнем берем знак плюс:

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{2ks}{m}}\right)}.$$

Разделив переменные, получим:

$$\frac{ds}{\sqrt{1-e^{-\frac{2ks}{m}}}}=\sqrt{\frac{mg}{k}}\,dt,$$

отсюда

$$\int\frac{ds}{\sqrt{1-e^{-\frac{2ks}{m}}}}=\sqrt{\frac{mg}{k}}\,t+C. \tag{5}$$

Интеграл в левой части равенства (5) берем подстановкой

$$z=e^{\frac{ks}{m}},$$

$$dz=\frac{k}{m}e^{\frac{ks}{m}}\,ds$$

и тогда

$$ds=\frac{m}{k}e^{-\frac{ks}{m}},\ dz=\frac{m}{k}\frac{dz}{z}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{ds}{\sqrt{1-e^{-\frac{ks}{m}}}}=\frac{m}{k}\int\frac{dz}{z\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}}=\frac{m}{k}\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}=$$

$$=\frac{m}{k}\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)=\frac{m}{k}\ln\left(e^{\frac{ks}{m}}+\sqrt{e^{\frac{2ks}{m}}-1}\right)=\sqrt{\frac{mg}{k}}\,t+C.$$

Подставляя в последнее равенство начальные условия $t=0$ и $s=0$, получим, что $C=0$.

Итак, решение уравнения (5):

$$\frac{m}{k}\ln\left(e^{\frac{ks}{m}}+\sqrt{e^{\frac{2ks}{m}}-1}\right)=\sqrt{\frac{mg}{k}}\,t,$$

отсюда

$$e^{\frac{ks}{m}}+\sqrt{e^{\frac{2ks}{m}}-1}=e^{\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t}, \tag{6}$$

$$\frac{1}{e^{\frac{ks}{m}}+\sqrt{e^{\frac{2ks}{m}}-1}}=e^{-\sqrt{\frac{kg}{m}}\,t}. \tag{7}$$

Умножая числитель и знаменатель левой части равенства (7) на выражение

$$e^{\frac{ks}{m}}-\sqrt{e^{\frac{2ks}{m}}-1},$$

получаем:
$$e^{\frac{ks}{m}}-\sqrt{e^{\frac{2ks}{m}}-1}=e^{-\sqrt{\frac{kg}{m}}\cdot t},$$

откуда, учитывая равенство (6), получим:

$$e^{\frac{ks}{m}}=\frac{e^{\sqrt{\frac{kg}{m}}\cdot t}+e^{-\sqrt{\frac{kg}{m}}\cdot t}}{2}.$$

Окончательно закон движения падающего тела будет:

$$s=\frac{m}{k}\ln\frac{e^{\sqrt{\frac{kg}{m}}\cdot t}+e^{-\sqrt{\frac{kg}{m}}\cdot t}}{2}.$$

Задача 54. *Пуля входит в брус толщиной 12 см со скоростью 200 м/сек, а вылетает из него, пробив его, со скоростью 60 м/сек. Брус задерживает движение пули, сила сопротивления которого пропорциональна квадрату скорости движения (рис. 37). Найти время движения пули через брус.*

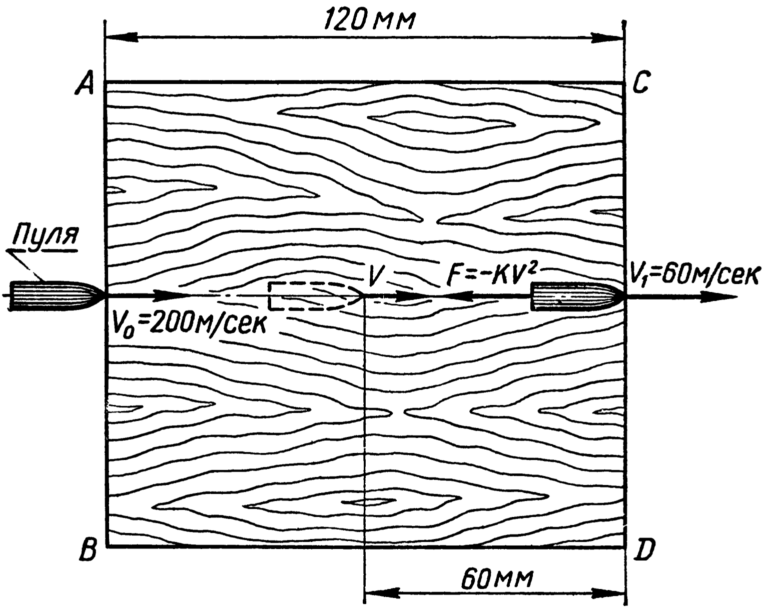

Рис. 37

Решение

Внутри бруса в любой момент t на пулю действует сила сопротивления бруса F. Она направлена против движения, а по величине пропорциональна квадрату скорости движения пули в данный момент.

Таким образом,

$$F = -kv^2.$$

По основному закону динамики (2-й закон Ньютона) сила равна произведению массы точки на ускорение w, которое сообщается точке, т. е.

$$F = mw.$$

Сопоставляя уравнения, получим:

$$mw = -kv^2. \qquad (1)$$

Как известно из курса кинематики, скорость точки равна

$$v = \frac{ds}{dt}, \qquad (2)$$

а ускорение

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}. \qquad (3)$$

Здесь s — путь, t — время.

Подставляя значения v и w в дифференциальной форме из формул (2) и (3) в уравнение (1), получим дифференциальное уравнение движения:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{k}{m}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \qquad (4)$$

Уравнение (4) представляет собой неполное линейное уравнение второго порядка типа

$$y'' = f(y')$$

и решается методом понижения порядка уравнения путем введения новой искомой функции:

$$\left.\begin{aligned} p = y' = \frac{dy}{dx}, \\ p' = y'' = \frac{dp}{dx}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Применение этого метода для рассматриваемого уравнения (4) приводит к следующему:

$$\frac{ds}{dt} = p; \quad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dp}{dt},$$

и уравнение (4) примет вид:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{k}{m}p^2.$$

Разделяя переменные p и t

$$\frac{dp}{p^2} = -\frac{k}{m}\,dt$$

и почленно интегрируя, получаем:

$$-\frac{1}{p}=-\frac{k}{m}t+C_1.$$

Подставляем значение p и интегрируем еще раз:

$$-\frac{dt}{ds}=-\frac{k}{m}t+C_1;$$

$$ds=\frac{dt}{\frac{k}{m}t-C_1};$$

$$s=\frac{m}{k}\int\frac{d\left(\frac{k}{m}t-C_1\right)}{\frac{k}{m}t-C_1}=\frac{m}{k}\ln\left(\frac{k}{m}t-C_1\right)+C_2. \tag{6}$$

Для того чтобы от общего решения (6) перейти к интересующему нас частному решению, определим значения произвольных постоянных C_1 и C_2 для условия задачи.

Из начальных условий явствует, что при $t=0$, $s=0$ и при $t=0$, $\frac{ds}{dt}=200$ *м/сек*. Кроме того, продифференцировав уравнение (6), получим:

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{\frac{k}{m}t-C_1}. \tag{7}$$

Из уравнения (7) определим C_1:

$$200=\frac{1}{\frac{k}{m}\cdot 0-C_1};\quad C_1=-\frac{1}{200},$$

а затем из уравнения (6) величину C_2:

$$0=\frac{m}{k}\ln\left(\frac{k}{m}\cdot 0+\frac{1}{200}\right)+C_2;$$

$$C_2=-\frac{m}{k}\ln\frac{1}{200}=\frac{m}{k}\ln 200.$$

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в общее решение (6), получим частное решение, изображающее уравнение движения в условиях данной задачи:

$$s=\frac{m}{k}\ln\left(\frac{k}{m}t+\frac{1}{200}\right)+\frac{m}{k}\ln 200=$$

$$=\frac{m}{k}\ln\left[\left(\frac{k}{m}t+\frac{1}{200}\right)200\right]=\frac{m}{k}\ln\left(200\frac{k}{m}t+1\right);$$

$$s=\frac{m}{k}\ln\left(200\frac{k}{m}t+1\right). \tag{8}$$

Разрешая уравнение (8) относительно t, получим:

$$200\frac{k}{m}t+1=e^{\frac{k\cdot s}{m}},$$

или

$$t=\frac{m}{200k}\left(e^{\frac{k\cdot s}{m}}-1\right). \qquad (9)$$

Как видно из полученных уравнений (8), (9), для определения искомого времени t необходимо найти неизвестные величины k и m.

Коэффициент пропорциональности k определим из дополнительного условия: при $s=h=12$ *см* $=0{,}12$ *м*; $\frac{ds}{dt}=60$ *м/сек*.

Для применения этого дополнительного условия нам необходимо продифференцировать уравнение (8), чтобы получить выражение $\frac{ds}{dt}$:

$$\frac{ds}{dt}=\frac{200}{200\frac{k}{m}t+1}. \qquad (10)$$

Найденную величину t из уравнения (9) подставляем в уравнение (10), которое примет вид:

$$\frac{ds}{dt}=\frac{200}{e^{\frac{ks}{m}}}. \qquad (11)$$

Подстановка дополнительных условий приведет к следующему равенству:

$$60=\frac{200}{e^{0{,}12\frac{k}{m}}}, \qquad (12)$$

откуда

$$k=\frac{\ln\frac{10}{3}}{0{,}12}m\cong 10{,}03m.$$

Анализируя формулу (11), видим, что, так как k является линейной функцией m $(k=10{,}03m)$, нет надобности в определении m, а достаточно найти величину $e^{\frac{k}{m}}$, что, кстати, значительно упрощает выкладки.

Из того же уравнения (12)

$$e^{\frac{k}{m}}=\left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{25}{3}}.$$

Подставляя числовые значения величин k и $e^{\frac{k}{m}}$ в уравнение (9), получим:

$$t = \frac{m}{200 \cdot 10{,}08m}\left[\left(\frac{10}{3}\right)^{\frac{25}{3}\, 0{,}12} - 1\right] = \frac{1}{2006}\left(\frac{10}{3} - 1\right) \cong 0{,}00114 \text{ сек.}$$

Итак, время прохождения пули через брус составляет 0,00114 *сек* (немногим более одной тысячной доли секунды).

Задача 55. *Подводная лодка, не имевшая хода, получив небольшую отрицательную плавучесть P, погружается на глубину, двигаясь поступательно* (рис. 38).

Сопротивление воды при небольшой отрицательной плавучести можно принять пропорциональным первой степени скорости погружения и равным kSv, где k — коэффициент пропорциональности, S — площадь горизонтальной проекции лодки, v — скорость погружения. Масса лодки равна M.

Определить:

1) *скорость погружения v, если при $t=0$ начальная скорость $v_0=0$;*

2) *путь, пройденный погружающейся лодкой за время T.*

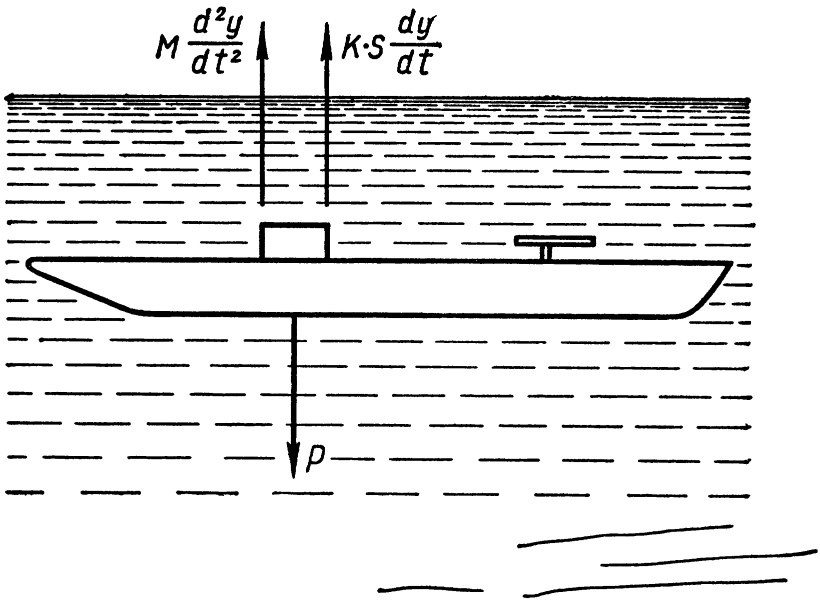

Рис. 38

Решение

Проектируя действующие при погружении лодки силы на вертикальную ось, получаем дифференциальное уравнение движения:

$$M\frac{d^2y}{dt^2}+kS\frac{dy}{dt}-P=0. \qquad (1)$$

Здесь $M\frac{d^2y}{dt^2}$ — произведение массы на ускорение (сила тяжести погружающейся лодки), $kS\frac{dy}{dt}$ — сопротивление воды.

Вводя подстановку $v=\frac{dy}{dt}$ и деля уравнение (1) на M, получим:

$$\frac{dv}{dt}+\frac{kSv}{M}-\frac{P}{M}=0. \qquad (2)$$

В уравнении (2) легко отделяем переменные и приходим к равенству:

$$\frac{Mdv}{P-kSv}=dt. \qquad (3)$$

Интегрируя уравнение (3), получаем общее решение:

$$-\frac{M}{kS}\ln C(P-kSv)=t. \qquad (4)$$

Постоянную C определяем из начальных условий: при $t=0$ $v=0$:

$$C=\frac{1}{P}$$

Таким образом, уравнение (4) принимает вид:

$$-\frac{M}{kS}\ln\frac{1}{P}(P-kSv)=-\frac{M}{kS}\ln\left(1-\frac{k}{P}Sv\right)=t.$$

После простых алгебраических преобразований:

$$\ln\left(1-\frac{k}{P}Sv\right)=-\frac{kS}{M}t,$$

$$1-\frac{k}{P}Sv=e^{-\frac{kS}{M}t},$$

или искомая скорость погружения

$$v=\frac{P}{kS}\left(1-e^{-\frac{kS}{M}t}\right). \qquad (5)$$

Для определения пути, пройденного погружающейся лодкой за время T, уравнение (5) переписываем в виде:

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{P}{kS}\left(1-e^{-\frac{kS}{M}t}\right),$$

или

$$ds=\frac{P}{kS}\left(1-e^{-\frac{kS}{M}t}\right)\cdot dt.$$

Интегрируя это элементарное уравнение первого порядка с разделенными переменными, находим формулу пути в зависимости от времени:

$$s=\frac{P}{kS}\left(t+\frac{M}{kS}e^{-\frac{kS}{M}t}+C\right). \tag{6}$$

Определим постоянную C, используя для этого начальные условия задачи: при $t=0$, $s=0$.

Из уравнения (6) получим:

$$0=\frac{P}{kS}\left(\frac{M}{kS}+C\right),$$

или

$$C=-\frac{M}{kS}. \tag{9}$$

Тогда интересующее нас частное решение задачи будет:

$$s=\frac{P}{kS}\left(t+\frac{M}{kS}e^{-\frac{kS}{M}t}-\frac{M}{kS}\right)=\frac{P}{kS}\left[t-\frac{M}{kS}\left(1-e^{-\frac{kS}{M}t}\right)\right]. \tag{10}$$

При $t=T$ искомый пройденный путь $s=z$ выразится формулой:

$$z=\frac{P}{kS}\left[T-\frac{P}{kS}\left(1-e^{-\frac{kS}{M}T}\right)\right].$$

Задача 56. *Определить форму, которую принимает под влиянием собственного веса гибкая тяжелая нить, подвешенная в своих концах C и D.*

Решение

Построим систему координат в плоскости расположения нити, как это показано на рисунке 39. Начало координат выберем в некотором, пока еще не определенном расстоянии OA от самой низкой точки кривой A.

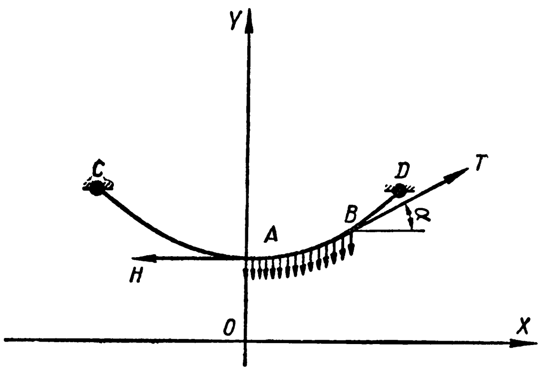

Рис. 39

Рассмотрим часть кривой AB. На эту часть действуют следующие силы: в точке A — горизонтальное натяжение H, в

точке B — направленное по касательной натяжение T и вес части нити AB, пропорциональный длине нити AB. Собственный вес участка нити AB равен $p \cdot s$,
где p — вес единицы длины нити,
s — длина дуги AB.

Согласно общеизвестным условиям равновесия статики сумма проекций вертикальных и горизонтальных составляющих должна быть равной нулю. Проектируя все силы на оси Ox и Oy, получаем соответственно:

$$\left.\begin{aligned} T\cos\alpha &= H, \\ T\sin\alpha &= ps. \end{aligned}\right\}$$

Разделяя второе равенство на первое, легко находим:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{ps}{H}.$$

Так как

$$\operatorname{tg}\alpha = y',$$

то

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{ps}{H}. \tag{1}$$

Для устранения третьей неизвестной s, дифференцируем уравнение (1) по x. Таким образом,

$$y'' = \frac{p}{H}\frac{ds}{dx}.$$

Так как

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2},$$

то окончательно уравнение примет вид:

$$y'' = \frac{p}{H}\sqrt{1+y'^2}. \tag{2}$$

Уравнение (2) представляет собой линейное уравнение типа $y'' = f(y')$ Решаем его подстановкой $y' = z$. Соответственно $y'' = z'$, и уравнение (2), полагая $\frac{p}{H} = \frac{1}{a}$, примет вид:

$$z' = \frac{p}{H}\sqrt{1+z^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1+z^2}. \tag{3}$$

Интегрируя уравнение (3), имеем:

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{dx}{a}.$$

Откуда общее решение принимает вид:

$$\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right) = \frac{x}{a} + C_1.$$

Постоянную интегрирования определяем из начальных условий. Касательная в точке A параллельна оси абсцисс, так что при $x=0$ $y'=z=0$. Таким образом,

$$\ln 1=C_1,$$

т. е.

$$C_1=0.$$

Итак, для условий нашей задачи общее решение принимает вид:

$$\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)=\frac{x}{a}, \tag{4}$$

или, потенцируя обе части равенства (4), получим:

$$z+\sqrt{1+z^2}=e^{\frac{x}{a}}. \tag{5}$$

Уравнение (5) можно преобразовать, умножив обе части равенства на $z-\sqrt{1+z^2}$. Тогда уравнение будет:

$$-1=\left(z-\sqrt{1+z^2}\right)e^{\frac{x}{a}},$$

откуда

$$z-\sqrt{1+z^2}=-e^{-\frac{x}{a}}. \tag{6}$$

Складывая равенства (5) и (6) и почленно деля на 2, получаем:

$$z=y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right). \tag{7}$$

Интегрируя уравнение (7), находим:

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)+C_2=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}+C_2.$$

Если начало координат на расстоянии a от точки A, то (при $x=0$) y должно быть равно a, а поэтому $C_2=0$. При этом уравнение кривой приводится к уравнению цепной линии:

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}.$$

Форму цепной линии, в частности, принимает подвешенная за концы цепь (поскольку цепь с некоторым приближением можно считать за гибкую нить), отсюда и происхождение наименования линии.

Задача 57. *Корабль водоизмещением $P=1500$ т преодолевает сопротивление воды, равное $R=\alpha v^2 m$, где $\alpha=0{,}12$, m — масса, а v — скорость корабля. Сила упора винтов направлена по скорости в сторону движения и изменяется по закону:*

$$T=T_0\left(1-\frac{v}{v_s}\right),$$

где $T_0=120$ *т — сила упора винтов, когда корабль находится без движения, а* $v_s=\text{const}=33$ *м/сек.*

Найти зависимость:

1) *скорости корабля от времени, если начальная скорость равна* v_0;

2) *пройденного пути от скорости;*

3) *пути от времени при начальной скорости* $v_0=10$ *м/сек.*

Решение

Проектируя действующие силы на горизонталь с учетом знаков и скорости движения корабля в виде $v=\frac{dx}{dt}$, получаем уравнение движения корабля:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-T_0\left(1-\frac{\frac{dx}{dt}}{v_s}\right)=0,$$

или

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=T_0\left(1-\frac{\frac{dx}{dt}}{v_s}\right)-\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Разделяя переменные, имеем:

$$m\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{T_0\left(1-\frac{\frac{dx}{dt}}{v_s}\right)-\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}=dt,$$

или

$$-m\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{T_0\frac{dx}{dt}}{v_s}-T_0}=dt. \qquad (1)$$

Интегрируя уравнение (1), получаем общее решение:

$$-\frac{m}{2\sqrt{T_0\left(\alpha+\frac{T_0}{4v_s^2}\right)}}\ln\left[\frac{\sqrt{T_0\left(\alpha+\frac{T_0}{4v_s^2}\right)}-\frac{T_0}{2v_s}-\alpha\frac{dx}{dt}}{\sqrt{T_0\left(\alpha+\frac{T_0}{4v_s^2}\right)}+\frac{T_0}{2v_s}+\alpha\frac{dx}{dt}}\right]=t+C. \qquad (2)$$

Вводим обозначение:

$$\sqrt{T_0\left(\alpha+\frac{T_0}{4v_s^2}\right)}=\beta.$$

Частное решение находим из уравнения (2), используя начальные условия: при $t=0$ скорость $\frac{dx}{dt}=v_0$.

Вычисляем сперва постоянную интегрирования:

$$C = -\frac{m}{2\beta}\ln\left[\frac{\beta - \frac{T_0}{2v_s} - \alpha v_0}{\beta + \frac{T_0}{2v_s} + \alpha v_0}\right].$$

Тогда искомое частное решение:

$$t = \frac{m}{2\beta}\ln\left[\frac{\left(\beta - \frac{T_0}{2v_s} + \alpha\frac{dx}{dt}\right)\left(\beta + \frac{T_0}{2v_s} + \alpha v_0\right)}{\left(\beta + \frac{T_0}{2v_s} + \alpha\frac{dx}{dt}\right)\left(\beta - \frac{T_0}{2v_s} - \alpha v_0\right)}\right]. \tag{3}$$

Подставляя числовые данные согласно условиям задачи, получаем:

$$\beta = 4{,}2;$$
$$\frac{T_0}{2v_0} = 1{,}8;$$
$$\frac{2\beta}{m} = 0{,}055.$$

Тогда уравнение (3) принимает вид:

$$\frac{\left(50 + \frac{dx}{dt}\right)}{\left(20 - \frac{dx}{dt}\right)} \cdot \frac{(20 - v_0)}{(50 + v_0)} = e^{0{,}055t}.$$

Разрешая последнее равенство относительно $\frac{dx}{dt}$, находим:

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{70v_0 + 20(v_0 + 50)\ (e^{0.055t} - 1)}{70 + (v_0 + 50)\ (e^{0{,}055t} - 1)}\ . \tag{4}$$

Здесь v_0 в *м/сек*.

Зависимость пройденного пути от скорости находится нижеследующим образом.

Уравнение (1) может быть записано в виде:

$$\frac{mvdv}{\alpha v^2 + \frac{T_0}{v_s}v - T_0} = -dx. \tag{5}$$

Интегрируя уравнение (5), находим:

$$x = \int \frac{mvdv}{T_0 - \frac{T_0}{v_s}v - \alpha v^2} + x_0,$$

или

$$x - x_0 = \frac{m}{2\alpha}\ln\left\{1 - \left(\frac{\varphi + v}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\right\} + \frac{m\varphi\sqrt{\varepsilon}}{2\alpha\varepsilon}\ln\left\{\frac{1 + \frac{\varphi + v}{\sqrt{\varepsilon}}}{1 - \frac{\varphi + v}{\sqrt{\varepsilon}}}\right\}. \tag{6}$$

Здесь для упрощения выкладок принято

$$\varphi = \frac{T_0}{2\alpha v_s} = 15\ \text{м/сек};\qquad \varepsilon = \frac{T_0}{\alpha}\left(1 + \frac{T_0}{4\alpha v_s^2}\right) = 1225\ \text{м}^2/\text{сек}^2.$$

Подставляя числовые значения φ и ε в уравнение (6), получаем:

$$x_0 - x = 637{,}5 \ln \left\{1 - \left(\frac{15+v}{35}\right)^2\right\} + 273{,}9 \ln \left\{\frac{50+v}{20-v}\right\}.$$

Пользуясь начальными условиями, определим величину x_0. При $t=0$; $x=0$; $v=v_0$. Следовательно,

$$x_0 = 637{,}5 \ln \left\{1 - \left(\frac{15+v_0}{35}\right)^2\right\} + 273{,}9 \ln \left(\frac{50+v_0}{20-v_0}\right).$$

Таким образом, искомая зависимость $x=f(t)$ определяется равенством:

$$x = 637{,}5 \ln \frac{v_0^2+30v_0-1000}{v^2+30v-1000} + 273{,}9 \ln \frac{(v-20)(v+50)}{(v_0-20)(v_0+50)}.$$

Найдем зависимость пути от времени при начальной скорости $v_0=10$ *м/сек.*

Из уравнения (4) имеем:

$$dx = \frac{20(v_0+50)(e^{0{,}055t}-1)+70v_0}{(v_0+50)(e^{0{,}055t}-1)+70}\,dt = \\ = 20dt - \frac{70(20-v_0)\,dt}{(v_0+50)e^{0{,}055t}+(20-v_0)}. \qquad (7)$$

Интегрируя уравнение (7), имеем:

$$C + x = 20t - 70\,\frac{20-v_0}{v_0+50}\int \frac{dt}{e^{0{,}055t}+\dfrac{20-v_0}{v_0+50}}. \qquad (8)$$

Вводим обозначение $z=\dfrac{20-v_0}{v_0+50}$ и применяем подстановку $e^{0{,}055t}=y$;

тогда $dt=\dfrac{1}{0{,}055y}\cdot dy$.

Равенство (8) принимает вид:

$$C + x = 20t - \frac{70z}{0{,}055z}\ln \frac{e^{0{,}055t}}{e^{0{,}055t}+\dfrac{20-v_0}{v_0+50}}.$$

Находим постоянную интегрирования C, используя начальные условия: при $t=0$ $x=0$. Следовательно,

$$C = -\frac{70}{0{,}055}\ln \frac{1}{1+\dfrac{20-v_0}{v_0+50}} = 199{,}3.$$

Подставляя значение $v_0=10$ *м/сек*, получаем искомую зависимость пути от времени:

$$s=x\Big|_{v_0=10\ м/сек}=20t-127^2\ln\frac{6e^{0,055t}}{6e^{0,055t}+1}-199,3.$$

§ 3. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Физика (механика, колебания)

Задача 58. *Определить закон движения материальной частицы массы m под влиянием восстанавливающей силы (силы, направленной к центру O и прямо пропорциональной удалению x частицы от центра притяжения O), силы сопротивления и внешней силы $F=c_1\sin(qt+\varphi_0)$, причем $h^2-k^2<0$.*

Примечание. Если материальная частица массы m движется под действием восстанавливающей силы в среде с сопротивлением F_1, пропорциональным скорости v, т. е. $F_1=-bv$, то F_1 называем силой сопротивления, а величину $h=\frac{b}{2m}$ — коэффициентом сопротивления.

Решение

Кроме восстанавливающей силы $f=-ax$ и силы сопротивления $f_1=-bv$, на частицу действует еще внешняя сила $F_{вн}=c_1\sin(qt+\varphi_0)$. Как видно из рисунка 40, равнодействующая всех сил

$$R=F_{вн}+f+f_1.$$

На основании 2-го закона динамики получим дифференциальное уравнение движения в виде:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+ax=c_1\sin(qt+\varphi_0),$$

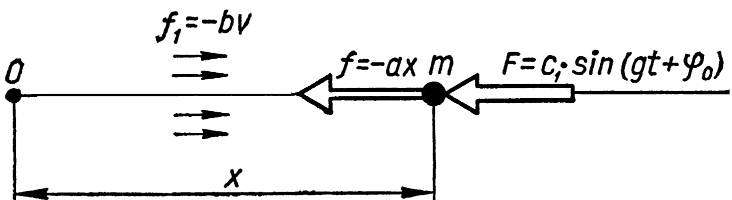

Рис. 40

или

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2h\frac{dx}{dt}+k^2x=c_1\sin(qt+\varphi_0), \qquad (1)$$

где $2h=\frac{b}{m}$, $k^2=\frac{a}{m}$.

Это неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Решим его для нашего случая $h^2-k^2<0$ (случай малого сопротивления).

Пусть

$$h^2-k^2=-p^2.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} r_1&=-h+pi,\\ r_2&=-h-pi. \end{aligned}\right\}$$

Характеристическое уравнение дифференциального уравнения (1)

$$r^2+2hr+k^2=0$$

имеет комплексные корни:

$$r_{1,2}=-h\pm\sqrt{h^2-k^2}=-h\pm\sqrt{-p^2}=-h\pm pi.$$

В случае комплексных корней общее решение соответствующего однородного уравнения примет вид:

$$x=e^{-ht}(C_1\sin pt+C_2\cos pt),$$

или

$$x=C_1e^{-ht}\left(\sin pt+\frac{C_2}{C_1}\cos pt\right).$$

Вводя вспомогательный угол φ соотношением

$$\frac{C_2}{C_1}=\operatorname{tg}\varphi,$$

получим:

$$x=\frac{C_1}{\cos\varphi}e^{-ht}(\cos\varphi\sin pt+\sin\varphi\cos pt).$$

Обозначая

$$\frac{C_1}{\cos\varphi}=A,$$

получим:

$$x=Ae^{-ht}\sin(pt+\varphi).$$

Частное решение уравнения (1) будем искать в виде вспомогательной функции V. Вспомогательная функция и ее производные равны:

$$\left.\begin{aligned} V&=M\sin(qt+\varphi_0)+N\cos(qt+\varphi_0),\\ \frac{dV}{dt}&=Mq\cos(qt+\varphi_0)-Nq\sin(qt+\varphi_0),\\ \frac{d^2V}{dt^2}&=-Mq^2\sin(qt+\varphi_0)-Nq^2\cos(qt+\varphi_0). \end{aligned}\right\}$$

Подстановка этих выражений в уравнение (1) дает равенство:

$$\begin{aligned} &-Mq^2\sin(qt+\varphi_0)-Nq^2\cos(qt+\varphi_0)+2hMq\cos(qt+\varphi_0)-\\ &\quad-2hNq\sin(qt+\varphi_0)+k^2M\sin(qt+\varphi_0)+k^2N\cos(qt+\varphi_0)=\\ &\quad=c\sin(qt+\varphi_0), \end{aligned}$$

или

$$(k^2M - Mq^2 - 2hNq)\sin(qt+\varphi_0)+$$
$$+(k^2N - Nq^2+2hMq)\cos(qt+\varphi_0)=c\sin(qt+\varphi_0).$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты, получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} k^2M - Mq^2 - 2hNq&=c,\\ k^2N - Nq^2+2hMq&=0.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Решая систему (2), получаем значения M и N:

$$\left.\begin{aligned} N&=-\frac{2hqc}{4h^2q^2+(k^2-q^2)^2},\\ M&=\frac{c(k^2-q^2)}{4h^2q^2+(k^2-q^2)^2}.\end{aligned}\right\}$$

Таким образом, общее решение получит вид:

$$x=Ae^{-ht}\sin(pt+\varphi)+\frac{c(k^2-q^2)}{4h^2q^2+(k^2-q^2)}\sin(qt+\varphi_0)-$$
$$-\frac{2hqc}{4h^2q^2+(k^2-q^2)}\cos(qt+\varphi_0),$$

или

$$x=Ae^{-ht}\sin(pt+\varphi)+\frac{c(k^2-q^2)}{4h^2q^2+(k^2-q^2)}\left[\sin(qt+\varphi_0)-\right.$$
$$\left.-\frac{2hq}{k^2-h^2}\cos(qt+\varphi_0)\right].$$

Вводя вспомогательный угол φ_1 соотношением

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{2hq}{k^2-h^2}$$

и обозначая

$$\frac{c(k^2-q^2)}{[4h^2q^2+(k^2-q^2)^2]\cos\varphi_1}=B,$$

окончательно получим:

$$x=Ae^{-ht}\sin(pt+\varphi)+B\sin(qt+\varphi_0-\varphi_1). \qquad (3)$$

Колебательное движение, описываемое уравнением (3), состоит из двух частей: собственного колебания $x_1=Ae^{-ht}\sin(pt+\varphi)$ и вынужденного колебания $x_2=B\sin(qt+\varphi_0-\varphi_1)$.

Первая часть оказывает существенное влияние на общее колебание только при малом t, т. е. в первое время движения. Это объясняется тем, что множитель e^{-ht} с возрастанием t быстро стремится к нулю. Таким образом, первая часть имеет значение только во время установления процесса. В дальнейшем величина x почти исключительно определяется вторым слагаемым, которое дает закон установившегося вынужденного колебания.

Задача 59. *Груз M массы m подвешен на пружине с жесткостью c. Конец пружины K совершает вертикальные гармонические колебания по закону $\overline{KL}=A\sin(pt)$.*

Найти закон движения груза, если сила сопротивления движению пропорциональна скорости груза.

Решение

Начало координат поместим в точке L; ось x направим по вертикали вниз. Дифференциальное уравнение движения груза в данном случае будет иметь вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-c\lambda-k\frac{dx}{dt}, \tag{1}$$

где λ — удлинение пружины,

$c\lambda$ — проекция на ось x реакции пружины,

k — коэффициент сопротивления.

Если l_0 — естественная длина пружины, то согласно рисунку 41 удлинение

$$\lambda=x-\overline{KL}-l_0=x-A\sin(pt)-l_0. \tag{2}$$

Подставляя выражение (2) в уравнение (1), находим:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-cx+cA\sin(pt)+cl_0-k\frac{dx}{dt}. \tag{3}$$

Произведем замену переменного x. Пусть

$$x=\xi+x_1,$$

где ξ — новая переменная,

x_1 — постоянная величина.

Тогда

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d\xi}{dt},\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2\xi}{dt^2},$$

и вместо (3) получаем уравнение:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2}=mg-c\xi-cx_1+$$
$$+cA\sin(pt)+cl_0-k\frac{d\xi}{dt}. \tag{4}$$

Выберем x_1 так, чтобы в правой части уравнения (4) исчезли постоянные члены, т. е. пусть

$$mg-cx_1+cl_0=0,$$

отсюда

$$x_1=l_0+\frac{mg}{c}. \tag{5}$$

Согласно закону Гука сила упругости (реакция) пружины F пропорциональна ее удлинению, т. е. $F=c\lambda$, где c — коэффициент пропорциональности, называемый жесткостью пружины. Так как в положении равновесия модуль силы F равен весу P, то $P=c\lambda_{ст}$, где $\lambda_{ст}$ — статическое удлинение пружины.

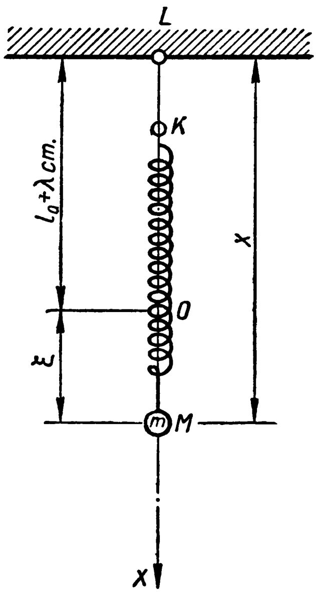

Рис. 41

Отсюда

$$c=\frac{P}{\lambda_{\text{ст}}}.$$

Обратно, зная жесткость c пружины, находим ее статическое удлинение:

$$\lambda_{\text{ст}}=\frac{P}{c}=\frac{mg}{c}.$$

Тогда формула (5) примет вид:

$$x_1=l_0+\lambda_{\text{ст}}.$$

Как видно из вышеизложенного, замена переменной эквивалентна переносу начала координат из точки L в положение равновесия груза O, если конец пружины закрепить в точке L. После замены дифференциальное уравнение (4) будет:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2}+k\frac{d\xi}{dt}+c\xi=cA\sin(pt),$$

или

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}+2n\frac{d\xi}{dt}+s^2\xi=h\sin(pt), \tag{6}$$

где

$$h=\frac{cA}{m}, \qquad 2n=\frac{k}{m}$$

и

$$s=\sqrt{\frac{c}{m}}=\sqrt{\frac{g}{\lambda_{\text{ст}}}}.$$

Уравнение (6) есть линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и с правой частью, отличной от нуля. Общее решение этого уравнения можно представить в виде:

$$\xi=X_1+X_2, \tag{7}$$

где X_1 — общее решение соответствующего однородного уравнения (без правой части),

X_2 — какое-либо частное решение данного уравнения.

Находим общее решение X_1 соответствующего однородного уравнения:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}+2n\frac{d\xi}{dt}+s^2\xi=0. \tag{8}$$

Для интегрирования этого уравнения применим способ замены переменного.

Пусть

$$\xi=\eta e^{-nt}, \tag{9}$$

где η — новая переменная.

Дифференцируя равенство (9) по t, получим:

$$\frac{d\xi}{dt}=e^{-nt}\left(\frac{d\eta}{dt}-n\eta\right),$$

и вторая производная

$$\frac{d^2\xi}{d^2t}=e^{-nt}\left(\frac{d^2\eta}{dt^2}-2n\frac{d\eta}{dt}+n^2\eta\right).$$

Подставляя значения функции ξ и ее производных в дифференциальное уравнение (8), после сокращения его на общий множитель e^{-nt} находим:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}-2n\frac{d\eta}{dt}+n^2\eta+2n\frac{d\eta}{dt}-2n^2\eta+s^2\eta=0,$$

или

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}+(s^2-n^2)\,\eta=0. \tag{10}$$

Допустим, что $s>n$; полагая тогда $s^2-n^2=s_1^2$, уравнение (10) приведем к виду:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}+s_1^2\eta=0. \tag{11}$$

Это есть линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и без свободного члена.

Проведем подробное интегрирование уравнения (11).

Соответствующее характеристическое уравнение $r^2+s_1^2=0$ имеет мнимые корни:

$$r_{1,2}=\pm\sqrt{-s_1^2}=\pm is_1.$$

Частные решения дифференциального уравнения (9) будут:

$$\eta_1=e^{r_1t}=e^{s_1it},$$
$$\eta_2=e^{r_2t}=e^{-s_1it}.$$

Так как корни мнимые, а частные решения независимые $\left(\text{отношение } \frac{e^{s_1it}}{e^{-s_1it}} \text{ — переменное}\right)$, то общее решение уравнения (11) выразится функцией:

$$\eta=e^{\alpha t}\,[C_1\cos(s_1t)+C_2\sin(s_1t)],$$

причем $\alpha=0$. Окончательно:

$$\eta=C_1\cos(s_1t)+C_2\sin(s_1t). \tag{12}$$

В практических применениях это общее решение дифференциального уравнения обычно преобразуется путем замены двучлена в правой части выражения (12).

Указанное преобразование осуществляется следующим образом. В равенстве (12) выносим за скобки величину $\sqrt{C_1^2+C_2^2}$.

Тогда

$$\eta=\sqrt{C_1^2+C_2^2}\left[\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\cos(s_1t)+\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\sin(s_1t)\right], \quad (13)$$

но

$$\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\right)^2+\left(\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}\right)^2=\frac{C_1^2}{C_1^2+C_2^2}+\frac{C_2^2}{C_1^2+C_2^2}=\frac{C_1^2+C_2^2}{C_1^2+C_2^2}=1.$$

На основании вышеизложенного величину $\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$ можно принять за $\sin\varphi$, а $\frac{C_2}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$ за $\cos\varphi$, так как эти величины соответствуют общеизвестной формуле тригонометрии $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$.

Таким путем из равенства (13) имеем:

$$\eta=\sqrt{C_1^2+C_2^2}\,[\sin\varphi\cos(s_1t)+\cos\varphi\sin(s_1t)]. \quad (14)$$

Обозначая

$$\sqrt{C_1^2+C_2^2}=C^*$$

и применяя формулу синуса суммы

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B,$$

будем иметь:

$$\eta=C^*\sin(s_1t+\varphi). \quad (15)$$

Уравнение (15) представляет собой уравнение гармонического колебания.

Так как $\xi=\eta e^{-nt}$, то, следуя обозначению, принятому в формуле (7), общий интеграл уравнения (8) будет:

$$X_1=C^*e^{-nt}\sin(s_1t+\varphi), \quad (16)$$

где C^* и φ — произвольные постоянные, а $s_1=\sqrt{s^2-n^2}$.

Уравнение (16) представляет уравнение затухающих колебаний.

Находим частное решение X_2 данного неоднородного уравнения.

Предположим, что

$$X_2=C^{**}\sin(pt+\psi), \quad (17)$$

где C^{**} и ψ — некоторые постоянные величины, которые нужно подобрать так, чтобы это значение X_2 тождественно удовлетворяло данному дифференциальному уравнению (6).

Находим:

$$\frac{dX_2}{dt}=C^{**}p\cos(pt+\psi)$$

и

$$\frac{d^2X_2}{dt^2}=-C^{**}p^2\sin(pt+\psi).$$

Подставляя эти значения производных, а также значение

X_2 в данное дифференциальное уравнение (6), получим:

$$-C^{**}p^2\sin(pt+\psi)+2nC^{**}p\cos(pt+\psi)+$$
$$+s^2C^{**}\sin(pt+\psi)=h\sin(pt),$$

или, полагая для краткости $pt+\psi=\theta$,

$$C^{**}(s^2-p^2)\sin\theta+2nC^{**}p\cos\theta=h\sin(\theta-\psi)$$

и

$$C^{**}(s^2-p^2)\sin\theta+2nC^{**}p\cos\theta=h\sin\theta\cos\psi-h\cos\theta\sin\psi.$$

Так как это равенство должно выполняться тождественно (при всяком θ), то коэффициенты при $\sin\theta$ и $\cos\theta$ в левой и правой частях должны быть равными, т. е.:

$$\left.\begin{aligned} h\cos\psi&=C^{**}(s^2-p^2),\\ h\sin\psi&=-2nC^{**}p.\end{aligned}\right\}\qquad(18)$$

Из системы (18) находим:

$$\left.\begin{aligned} C^{**}&=\frac{h}{\sqrt{(s^2-p^2)^2+4n^2p^2}},\\ \operatorname{tg}\psi&=-\frac{2np}{s^2-p^2}.\end{aligned}\right\}$$

Тем самым частное решение X_2 неоднородного уравнения определено полностью. Таким образом, общее решение данного дифференциального уравнения, дающее закон движения точки при наличии возмущающей силы, выражается зависимостью:

$$\xi=X_1+X_2=C^*e^{-nt}\sin(s_1t+\varphi)+C^{**}\sin(pt+\psi).$$

Ввиду того что множитель e^{-nt} быстро стремится к нулю, то через достаточно большой промежуток времени можно пренебречь членом, выражающим затухающие колебания. Тогда $\xi=C^{**}\sin(pt+\psi)$, т. е. груз совершает только вынужденные колебания около положения равновесия O.

2. Радиотехника

Задача 60. *Колебательный контур, представляющий собой замкнутую электрическую цепь, обладает емкостью C, индук-*

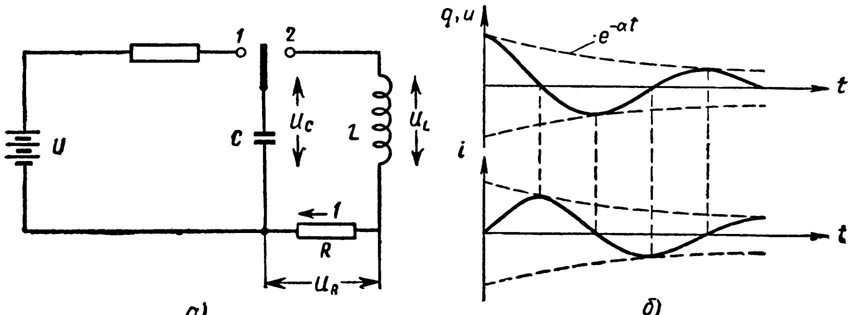

Рис. 42

тивностью L и активным сопротивлением R. При переходе энергии электрического поля конденсатора в энергию магнитного поля катушки (и обратно) часть энергии контура затрачивается на активных сопротивлениях, в результате чего величина напряжения на конденсаторе постепенно уменьшается. Найти законы изменения заряда конденсатора q и тока в контуре i, а также напряжения на конденсаторе u (рис. 42, *а*).

Решение

Ток в контуре определяется как частное от деления падения напряжения на сопротивлении на величину этого сопротивления:

$$i=\frac{u_R}{R}=\frac{u_C-u_L}{R}.$$

Здесь u_C — напряжение на конденсаторе, u_L — напряжение на катушке индуктивности, т. е.

$$u_L=L\frac{di}{dt}.$$

Проводим элементарные алгебраические преобразования и получаем исходное дифференциальное уравнение цепи:

$$L\frac{di}{dt}+iR-u_C=0.$$

Ток в контуре $i=-\frac{dq}{dt}$, где q — заряд конденсатора;

$$\frac{di}{dt}=-\frac{d^2q}{dt^2};\quad u=\frac{q}{C}.$$

Тогда уравнение цепи примет вид:

$$-L\frac{d^2q}{dt^2}-R\frac{dq}{dt}-\frac{q}{C}=0,$$

или

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{q}{LC}=0. \quad (1)$$

Подставляя в уравнение (1) величину $q=Cu$, находим дифференциальное уравнение закона изменения напряжения на конденсаторе:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du}{dt}+\frac{u}{LC}=0.$$

Уравнение (1) дифференцируем по t.

Так как

$$-\frac{d^3q}{dt^3}=\frac{d^2i}{dt^2},\quad -\frac{d^2q}{dt^2}=\frac{di}{dt},\quad -\frac{dq}{dt}=i,$$

то уравнение для определения тока будет:

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{i}{LC}=0.$$

Решение уравнения (1) будем искать в виде $q=Ae^{mt}$.

Тогда $\frac{dq}{dt}=Ame^{mt}$; $\frac{d^2q}{dt^2}=Am^2e^{mt}$.

Подставляя эти значения в уравнение (1), получаем:

$$Ae^{mt}\left(m^2+\frac{R}{L}m+\frac{1}{LC}\right)=0.$$

Выражение Ae^{mt} не может быть равно нулю, так как отсутствие заряда на конденсаторе обозначало бы отсутствие колебательного процесса.

Следовательно, $m^2+\frac{R}{L}m+\frac{1}{LC}=0$,

откуда

$$m_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}.$$

Для краткости введем обозначения:

$$\frac{1}{LC}=\omega_u^2,\ \frac{R}{2L}=\alpha.$$

Тогда

$$m_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_u^2}=-\alpha\pm j\sqrt{\omega_u^2-\alpha^2}.$$

Обозначая $\sqrt{\omega_u^2-\alpha^2}=\omega_p$, получим:

$$m_1=-\alpha+j\omega_p,$$
$$m_2=-\alpha-j\omega_p.$$

Заряд конденсатора выразится формулой:

$$q=A_1e^{m_1t}+A_2e^{m_2t}=e^{-\alpha t}(A_1e^{j\omega_pt}+A_2e^{-j\omega_pt}).$$

Используем формулу Эйлера:

$$e^{j\omega_pt}=\cos\omega_pt+j\sin\omega_pt,$$
$$e^{-j\omega_pt}=\cos\omega_pt-j\sin\omega_pt.$$

Тогда

$$q=e^{-\alpha t}[(A_1+A_2)\cos\omega_pt+j(A_1-A_2)\sin\omega_pt].$$

Обозначая $A_1+A_2=M$, $j(A_1-A_2)=N$, получим:

$$q=e^{-\alpha t}\ M\cos\omega_pt+N\sin\omega_pt). \qquad (2)$$

Значения M и N находятся из начальных условий:

при $t=0$, $q=Q_{max}$;
при $t=0$, $i=0$.

Таким образом, при $t=0$ на конденсаторе максимальный заряд $q=Q_{max}$, но по уравнению (2) при $t=0$, $q=M$.

Следовательно,

$$q=e^{-\alpha t}(Q_{max}\cos\omega_pt+N\sin\omega_pt), \qquad (3)$$

$$i=-\frac{dq}{dt}=-e^{-\alpha t}[(\omega_pN-\alpha Q_{max})\cos\omega_pt-(\omega_pQ_{max}+\alpha N)\sin\omega_pt]. \qquad (4)$$

В начальный момент при $t=0$ разряда конденсатора нет ($q=0$) и ток в цепи отсутствует ($i=0$).

Из второго начального условия и уравнения (4) следует, что

$$\omega_p N - \alpha Q_{max} = 0,$$

откуда

$$N = Q_{max} \cdot \frac{\alpha}{\omega_p}.$$

Подставляя значение N в уравнения (3) и (4), получим:

$$q = Q_{max} e^{-\alpha t}\left(\cos\omega_p t + \frac{\alpha}{\omega_p}\sin\omega_p t\right), \tag{5}$$

$$i = Q_{max}\left(\omega_p + \frac{\alpha^2}{\omega_p}\right)e^{-\alpha t}\sin\omega_p t. \tag{6}$$

Член $Q_{max}\left(\omega_p + \frac{\alpha^2}{\omega_p}\right) = I_{max}$ представляет собой максимальное значение тока.

Итак,

$$i = I_{max} e^{-\alpha t}\sin\omega_p t.$$

Используя зависимость $u = \frac{q}{C}$ и равенство (5), получим напряжение на конденсаторе:

$$u = U_{max} e^{-\alpha t}\left(\cos\omega_p t + \frac{\alpha}{\omega_p}\sin\omega_p t\right). \tag{7}$$

Уравнения затухающих колебаний (5), (6) и (7) изображены графически на рисунке (42, *б*).

§ 4. Системы дифференциальных уравнений второго порядка

В прикладных вопросах особое значение приобретают системы дифференциальных уравнений, к которым, в частности, сводится всякая задача, связанная с движением системы материальных точек и твердых тел в пространстве.

1. Теоретическая механика

Задача 61. *Камень брошен под углом α к горизонту и движется в среде, сопротивление которой пропорционально скорости v. Определить траекторию движения камня.*

Решение

В любой точке траектории камня $N(x, y)$ на него действуют две силы:

1) вес $P = mg$,
2) сопротивление среды $F = kv$.

Составляющие их равнодействующей по осям координат (рис. 43) будут:

$$\left.\begin{aligned} X &= P\cos(P,\ X)+F\cos(F,\ X),\\ Y &= P\cos(P,\ Y)+F\cos(F,\ Y)\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Но

$$\cos(P,\ X)=0;\quad \cos(P,\ Y)=1;$$

$$\cos(F,\ X)=-\frac{dx}{ds};\quad \cos(F,\ Y)=-\frac{dy}{ds}.$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} X &= -kv\frac{dx}{ds},\\ Y &= -mg-kv\frac{dy}{ds}.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Как известно, $v=\frac{ds}{dt}$. Тогда система (2) примет окончательный вид:

$$\left.\begin{aligned} X &= -k\frac{dx}{dt},\\ Y &= -k\frac{dy}{dt}-mg.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Используя 2-й закон динамики, получим дифференциальные уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -k\frac{dx}{dt},\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -k\frac{dy}{dt}-mg,\end{aligned}\right\} \qquad (4,\ a)$$

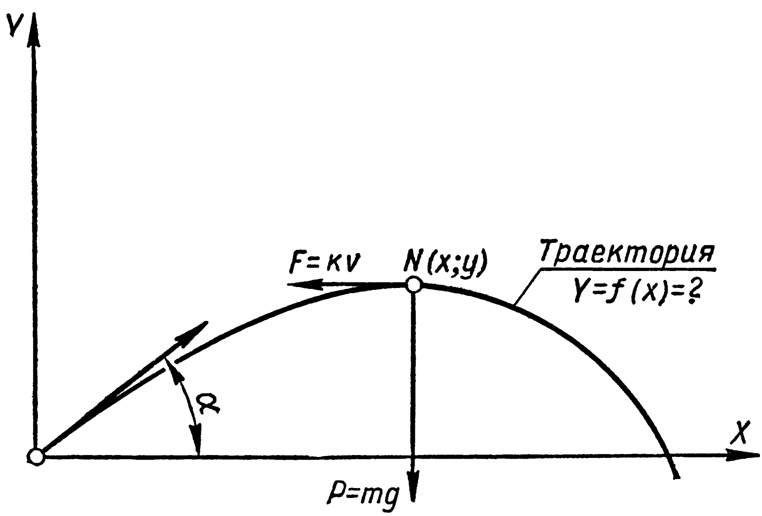

Рис. 43

или

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{dx}{dt}&=0,\\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{dy}{dt}&=-g.\end{aligned}\right\}\qquad(4,\ б)$$

Решая первое уравнение (4, *б*), как неполное линейное второго порядка, а второе,— как полное линейное уравнение второго порядка, получим общие решения:

$$\left.\begin{aligned}x&=C_1+C_2e^{-\frac{k}{m}t},\\ y&=C_3+C_4e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{gm}{k}t.\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Для получения частного решения используем начальные условия:

при $t=0,\ x=0,\ y=0,\quad \frac{dx}{dt}=v_0\cos\alpha,\ \frac{dy}{dt}=v_0\sin\alpha.$

Получаем:

$$\left.\begin{aligned}0&=C_1+C_2e^{-\frac{k}{m}0},\\ 0&=C_3+C_4e^{-\frac{k}{m}0}-\frac{gm}{k}0,\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

и так как

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{k}{m}C_2e^{-\frac{k}{m}t},$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{k}{m}C_4e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{gm}{k},$$

то

$$\left.\begin{aligned}v_0\cos\alpha&=-\frac{k}{m}C_2e^{-\frac{k}{m}0},\\ v_0\sin\alpha&=-\frac{k}{m}C_4-\frac{gm}{k}.\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Из уравнений (6) и (7) определяем произвольные постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4:

$$C_1=\frac{m}{k}v_0\cos\alpha,$$

$$C_2=-\frac{m}{k}v_0\cos\alpha,$$

$$C_3=\frac{m}{k^2}(gm+kv_0\sin\alpha),$$

$$C_4=-\frac{m}{k^2}(gm+kv_0\sin\alpha).$$

Подставляя найденные значения C_1, C_2, C_3 и C_4 в общее решение, получим частные решения:

$$\left.\begin{aligned} x &= \underbrace{\frac{m}{k} v_0 \cos\alpha}_{a} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) = a\left(1 - e^{-\frac{g}{c}t}\right), \\ y &= \underbrace{\frac{m}{k^2}(gm + kv_0 \sin\alpha)}_{b} \left(1 - e^{-\frac{g}{c}t}\right) - \frac{gm}{k} t = \\ &= b\left(1 - e^{-\frac{g}{c}t}\right) - ct. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Здесь $c = \frac{gm}{k}$; следовательно, $-\frac{k}{m} = -\frac{g}{c}$.

Значения a и b очевидны из (8). Для получения траектории движения камня исключаем время t.

Из первого уравнения (8):

$$1 - e^{-\frac{g}{c}t} = \frac{x}{a}.$$

Подставляя его во второе уравнение, получим:

$$y = b\frac{x}{a} - ct,$$

откуда находим

$$t = \frac{bx - ay}{ac}.$$

Полученное выражение для времени подставляем обратно в первое уравнение (8) и получаем:

$$x = a\left[1 - e^{-\frac{g}{ac^2}(bx - ay)}\right],$$

или траектория движения камня описывается кривой

$$ay - bx = \frac{ac^2}{g} \ln \frac{a - x}{a}.$$

2. Электротехника

З а д а ч а 62. *В магнитной связи с коэффициентом M взаимной индукции находятся две цепи A и B* (рис. 44). *L_1, R_1 и C_1 — коэффициент самоиндукции, сопротивление и емкость цепи A. L_2, R_2 и C_2 — те же величины для цепи B. Составить общее выражение для силы тока i в цепи A, предполагая, что:*

а) сопротивления цепей R_1 и R_2 весьма малы;

б) цепи настроены в унисон, т. е. $C_1L_1 = C_2L_2$.

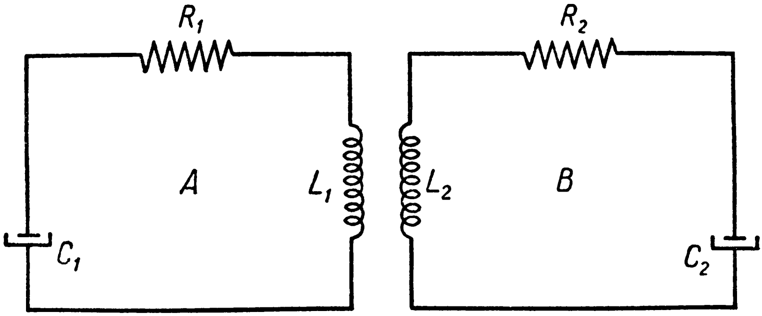

Рис. 44

Решение

В цепи A возникают следующие электродвижущие силы:

1. электродвижущая сила индукции $-M\frac{di_2}{dt}$;
2. электродвижущая сила самоиндукции $-L\frac{di_1}{dt}$;
3. напряжение конденсатора $-\frac{Q}{C_1}=\frac{1}{C_1}\int i_1 dt$.

Откуда

$$R_1 i_1 = -M\frac{di_2}{dt} - L_1\frac{di_1}{dt} - \frac{1}{C_1}\int i_1 dt. \qquad (1)$$

Аналогично для цепи B:

$$R_2 i_2 = -M\frac{di_1}{dt} - L_2\frac{di_2}{dt} - \frac{1}{C_2}\int i_2 dt. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) получаем систему дифференциальных уравнений процесса:

$$\left.\begin{aligned} M\frac{di_2}{dt} + L_1\frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1}\int i_1 dt = 0,\\ M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2}\int i_2 dt = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

или, дифференцируя,

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2 i_2}{dt^2} + L_1\frac{d^2 i_1}{dt^2} + R_1\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} i_1 = 0,\\ M\frac{d^2 i_1}{dt^2} + L_2\frac{d^2 i_2}{dt^2} + R_2\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2} i_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Уравнения (4) представляют систему двух уравнений второго порядка. Решим систему путем следующих преобразований. Исключим из уравнений системы (4) величину $\frac{d^2 i_2}{dt^2}$. Тогда

$$(L_1 L_2 - M^2)\frac{d^2 i_1}{dt^2} + L_2 R_1\frac{d^2 i_1}{dt} - MR_2\frac{di_2}{dt} + \frac{L_2}{C_1} i_1 - \frac{M}{C_2} i_2 = 0. \qquad (5)$$

Дифференцируя уравнение (5), находим:

$$(L_1L_2 - M^2)\frac{d^3i_1}{dt^3} + L_2R_1\frac{d^2i_1}{dt^2} - MR_2\frac{d^2i_2}{dt^2} + \\ + \frac{L_2}{C_1}\frac{di_1}{dt} - \frac{M}{C_2}\frac{di_2}{dt} = 0. \tag{6}$$

Заменяем величину $M\frac{d^2i_2}{dt^2}$ ее выражением из первого уравнения системы (4):

$$M\frac{d^2i_2}{dt^2} = -L_1\frac{d^2i_1}{dt^2} - R_1\frac{di_1}{dt} - \frac{1}{C_1}i_1$$

и подставляем в уравнение (6).

Получим:

$$(L_1L_2 - M^2)\frac{d^3i_1}{dt^3} + (L_2R_1 + L_1R_2)\frac{d^2i_1}{dt^2} + \\ + \left(\frac{L_2}{C_1} + R_1R_2\right)\frac{di_1}{dt} + \frac{R_2}{C_1}i_1 - \frac{M}{C_2}\frac{di_2}{dt} = 0. \tag{7}$$

Дифференцируя уравнение (7), находим:

$$(L_1L_2 - M^2)\frac{d^4i_2}{dt^4} + (L_2R_1 + L_1R_2)\frac{d^3i_1}{dt^3} + \\ + \left(\frac{L_2}{C_1} + R_1R_2\right)\frac{d^2i_1}{dt^2} + \frac{R_2}{C_1}\frac{di_1}{dt} - \frac{M}{C_2}\frac{d^2i_2}{dt^2} = 0. \tag{8}$$

Вторично заменяя величину $M\frac{d^2i_2}{dt^2}$ ее выражением из первого уравнения системы (4), получим:

$$(L_1L_2 - M^2)\frac{d^4i_1}{dt^4} + (L_2R_1 + L_1R_2)\frac{d^3i_1}{dt^3} + \\ + \left(\frac{L_1}{C_2} + \frac{L_2}{C_1} + R_1R_2\right)\frac{d^2i_1}{dt^2} + \left(\frac{R_1}{C_2} + \frac{R_2}{C_1}\right)\frac{di_1}{dt} + \\ + \frac{1}{C_1C_2}i_1 = 0. \tag{9}$$

Сокращаем уравнение (9) на L_1L_2:

$$\left(1 - \frac{M^2}{L_1L_2}\right)\frac{d^4i_1}{dt^4} + \left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2}\right)\frac{d^3i_1}{dt^3} + \\ + \left(\frac{1}{C_2L_2} + \frac{1}{C_1L_1} + \frac{R_1}{L_1}\cdot\frac{R_2}{L_2}\right)\frac{d^2i_1}{dt^2} + \left(\frac{R_1}{L_1}\cdot\frac{1}{C_2L_2} + \frac{R_2}{L_2}\cdot\frac{1}{C_1L_1}\right)\frac{di_1}{dt} + \\ + \frac{1}{C_1L_1}\cdot\frac{1}{C_2L_2}i_1 = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) представляет собой неполное линейное уравнение 4-го порядка, решение которого определит нам силу тока i_1 в цепи A.

Так как цепи настроены в унисон, т. е. $C_1L_1 = C_2L_2$, и сопротивлениями R_1 и R_2 можно пренебречь, то уравнение (10) примет более простой вид:

$$\left(1 - \frac{M^2}{L_1L_2}\right)\frac{d^4 i_1}{dt^4} + \frac{2}{C_1L_1}\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{1}{C_1^2L_1^2}\,i_1 = 0. \tag{11}$$

Соответствующее уравнению (11) характеристическое уравнение будет:

$$\left(1 - \frac{M^2}{L_1L_2}\right) r^4 + \frac{2}{C_1L_1}\,r^2 + \frac{1}{C_1^2L_1^2} = 0. \tag{12}$$

Обозначим для краткости:

$$\frac{M^2}{L_1L_2} = k^2; \qquad \frac{1}{C_1L_1} = n^2.$$

Тогда уравнение (12) примет вид:

$$(1 - k^2)\,r^4 + 2n^2r^2 + n^4 = 0. \tag{13}$$

Корни уравнения (13) следующие:

$$r_1 = \frac{ni}{\sqrt{1+k}}; \quad r_2 = -\frac{ni}{\sqrt{1+k}};$$
$$r_3 = \frac{ni}{\sqrt{1-k}}; \quad r_4 = -\frac{ni}{\sqrt{1-k}}.$$

Откуда искомое общее решение:

$$i = C_1 \sin\frac{n}{\sqrt{1+k}}\,t + C_2\cos\frac{n}{\sqrt{1+k}}\,t +$$
$$+ C_3\sin\frac{n}{\sqrt{1-k}}\,t + C_4\cos\frac{n}{\sqrt{1-k}}\,t.$$

Глава 3

ПРОЦЕССЫ, ОПИСЫВАЕМЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

1. Теория машин и механизмов

Задача 63. *Найти формулу критических скоростей тонкого вращающегося вала длиной l. Радиус поперечного сечения вала a, вес P и модуль упругости материала E.*

Решение

1) При увеличении угловой скорости вращающегося вала от значения $\omega=0$ до некоторого предельного значения $\omega=\omega_1$, называемого критической угловой скоростью, вал сохраняет свою прямолинейную ось. В момент достижения критической скорости ω_1 вал искривляется и начинает бить. При дальнейшем увеличении ω биение прекращается, а затем вновь возникает при второй критической скорости ω_2, и так периодически.

2) При вращении изогнутого вала на каждый его элемент действует центробежная сила, которую можно считать непрерывно распределенной нагрузкой.

На элемент $d\xi$ вала (рис. 45) действует центробежная сила $F=m\omega^2\eta$,

где m — масса элемента $d\xi$,

ω — угловая скорость вращения,

η — прогиб, равный радиусу вращения элемента $d\xi$.

Вес элемента $d\xi$ равен $\frac{P}{l}d\xi$, а масса $m=\frac{P}{gl}d\xi$. Таким образом, элементарная центробежная сила $dF=\frac{P}{gl}\omega^2\cdot\eta\cdot d\xi$. Прогиб η является функцией ξ, определяемой уравнением упругой линии. Таким образом, выражение $\frac{P}{gl}\cdot\omega^2\eta=f(\xi)$ и окончательно элементарная центробежная сила

$$dF=f(\xi)\,d\xi=\frac{P}{gl}\cdot\omega^2\eta d\xi. \qquad (1)$$

Момент этой силы относительно произвольного сечения B будет:

$$dF \cdot (x - \xi) = (x - \xi) f(\xi)\, d\xi.$$

Аналогично предыдущим рассуждениям изгибающий момент

$$M = \int_0^x (x - \xi) f(\xi)\, d\xi.$$

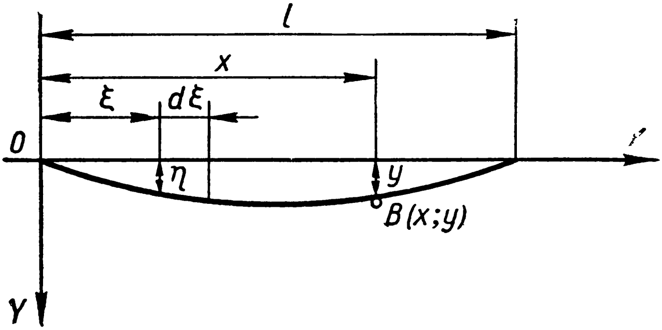

Рис. 45

Дифференцируя под знаком интеграла дважды это выражение по параметру x, получим:

$$\frac{dM}{dx} = \int_0^x f(\xi)\, d\xi + (x - x) f(x) \frac{dx}{dx} - (x - 0) f(0) \frac{d}{dx}(0) =$$

$$= \int_0^x f(\xi)\, d\xi;$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \int_0^x 0 \cdot d\xi + f(x) \frac{dx}{dx} - f(0) \frac{d}{dx}(0) = f(x). \tag{2}$$

Так как на основании равенства (1) $f(x) = \frac{P}{gl} \omega^2 y$, то выражение (2) примет вид:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(EJ \frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{P\omega^2}{gl} y.$$

Получаем дифференциальное уравнение упругой линии:

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{P\omega^2}{EJgl} y = 0. \tag{3}$$

Вводим обозначение $\frac{P\omega^2}{EJgl} = q^4$. Тогда уравнение (3) примет вид:

$$\frac{d^4y}{dx^4} - q^4 y = 0.$$

Решая это неполное линейное уравнение четвертого порядка, получаем характеристическое уравнение:

$$r^4 - q^4 = 0,$$

или

$$(r-q)(r+q)(r^2+q^2)=0.$$

Корнями характеристического уравнения будут:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= q, \\ r_2 &= -q, \\ r_3 &= qi, \\ r_4 &= -qi. \end{aligned}\right\}$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения упругой линии вала будет:

$$y = C_1 e^{qx} + C_2 e^{-qx} + C_3 \sin qx + C_4 \cos qx \tag{4}$$

Для определения постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3 и C_4 используем граничные условия задачи На опертых концах вала прогиб и кривизна оси вала равны нулю. Математически это выражается четырьмя граничными условиями:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \text{при}\ x=0, \quad y=0, \\ &2)\ \text{при}\ x=0, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=0, \\ &3)\ \text{при}\ x=l, \quad y=0, \\ &4)\ \text{при}\ x=l, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=0. \end{aligned}\right\}$$

Дифференцируя дважды общее решение (4), получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= C_1 q e^{qx} - C_2 q e^{-qx} + C_3 q \cos qx - C_4 q \sin qx, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= C_1 q^2 e^{qx} + C_2 q^2 e^{-qx} - C_3 q^2 \sin qx - C_4 q^2 \cos qx. \end{aligned}\right\}$$

Граничные условия дают следующую систему четырех уравнений для определения постоянных интегрирования:

$$\left.\begin{aligned} &C_1 e^{q\cdot 0} + C_2 e^{-q\cdot 0} + C_3 \sin(q\cdot 0) + C_4 \cos(q\cdot 0) = 0, \\ &C_1 q^2 \cdot e^{q\cdot 0} + C_2 q^2 e^{-q\cdot 0} - C_3 q^2 \sin(q\cdot 0) - C_4 q^2 \cos(q\cdot 0) = 0, \\ &C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} + C_3 \sin ql + C_4 \cos ql = 0, \\ &C_1 q^2 e^{ql} + C_2 q^2 e^{-ql} - C_3 q^2 \sin ql - C_4 q^2 \cos ql = 0, \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} &C_1 + C_2 + C_4 = 0, \\ &C_1 + C_2 - C_4 = 0, \\ &C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} + C_3 \sin ql + C_4 \cos ql = 0, \\ &C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} - C_3 \sin ql - C_4 \cos ql = 0. \end{aligned}\right\}$$

Складывая и вычитая два первых уравнения системы, получаем:

$$\left.\begin{aligned} C_4=0,\\ C_1+C_2=0,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

или

$$\left.\begin{aligned} C_2=-C_1,\\ C_4=0.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Поступая аналогично с двумя последующими уравнениями той же системы, получим:

$$\left.\begin{aligned} C_3 \sin ql+C_4 \cos ql=0,\\ C_1e^{ql}+C_2e^{-ql}=0.\end{aligned}\right\}$$

Подставляя выражение (5) в (6), получим:

$$\left.\begin{aligned} C_3 \sin ql=0,\\ C_1\left(e^{ql}-e^{-ql}\right)=0.\end{aligned}\right\}$$

Так как при $l \neq 0$ и $q \neq 0$ последнее выражение в скобках не может равняться нулю, то окончательно имеем:

$$\left.\begin{aligned} C_1=0,\\ C_2=0,\\ C_4=0,\\ C_3 \sin ql=0.\end{aligned}\right\}$$

Если $C_3=0$, то уравнение упругой линии вала будет $y=0$, т. е. упругая линия совпадает с осью x и вал не искривлен, При искривлении вала необходимо, чтобы $C_3 \neq 0$. Но тогда, очевидно, необходимо, чтобы

$$\sin ql=0.$$

Отсюда

$$ql=k\pi$$

и

$$q=\frac{k\pi}{l},$$

где $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

При $k=0$ получим $q=0$, и уравнение упругой линии вала будет:

$$y=C_1+C_2+C_4=0 \text{ — вал прямой}$$

При остальных значениях q вал искривляется. В таких случаях уравнение упругой линии

$$y=C_3 \sin ql,$$

при $\qquad q=q_1=\frac{\pi}{l}; \qquad q=q_2=\frac{2\pi}{l}; \qquad q=q_3=\frac{3\pi}{l}.$

Упругая линия будет синусоидой:

$$\left.\begin{aligned} y&=C_3\sin\frac{\pi}{l}x,\\ y&=C_3\sin\frac{2\pi}{l}x,\\ y&=C_3\sin\frac{3\pi}{l}x,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}$$

содержащей по длине вала 1, 2, 3 и больше полуволн.

Таким образом, при критическом значении

$$q_{\text{кр}}=\frac{k\pi}{l}$$

упругая линия будет синусоидой с k полуволнами по длине.

Вернемся к ранее введенному обозначению

$$q^4=\frac{P\omega^2}{EJgl}.$$

Подставляя в это последнее равенство критические значения $q_{\text{кр}}$ и $\omega_{\text{кр}}$, получим:

$$q_{\text{кр}}^4=\frac{P\omega_{\text{кр}}^2}{EJgl},$$

$$\frac{k^4\pi^4}{l^4}=\frac{P\omega_{\text{кр}}^2}{EJgl},$$

или

$$\omega_{\text{кр}}=\frac{k^2\pi^2}{l}\sqrt{\frac{EJg}{Pl}}.$$

Вычислим момент инерции площади сечения вала.

Момент инерции J материальной точки относительно оси представляет собой, как известно, произведение ее массы на квадрат расстояния точки от оси. Момент инерции всей площади поперечного сечения вала выражается формулой:

$$J=\lim_{\Delta m\to 0}\sum R^2\Delta m=\int R^2 dm,$$

где Δm — масса элементарной частицы,

R — расстояние какой-либо точки элементарной частицы от оси,

dm — дифференциал однородной массы, имеющей форму круга (для вала) при плотности $\rho=1$. В общем случае $dm=\rho dv$ и $J=\rho\int R^2 dv$.

Момент инерции J всей площади поперечного сечения вала относительно диаметра будет:

$$J=\frac{\rho\pi a^4}{4}.$$

Эту величину можно получить из справочных таблиц или вычислить при помощи определенного интеграла, решив задачу определения момента инерции круга относительно его диаметра.

Масса вала равна $m = \rho \pi a^2 l = \frac{P}{g}$.

Таким образом, момент инерции сечения вала

$$J = \frac{Pa^2}{4gl},$$

и для определения критической скорости получим выражение

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{k^2 \pi^2 a}{2l^2} \sqrt{E}.$$

Минимальная критическая скорость будет:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2 a}{2l^2} \sqrt{E}.$$

2. Строительная механика

Задача 64. *Цилиндрический резервуар для хранения жидкости, толщина D стенок которого мала по сравнению со средним радиусом R (рис. 46), а меридиональное сечение стенки — прямоугольник подвергается силовому воздействию давления жидкости. Найти дифференциальное уравнение деформации стенок резервуара.*

Решение

На элемент стенки с основанием $abcd$ и высотой dx, взятые на глубине x, действуют:

1) сила давления жидкости, равная $\gamma x R d\varphi dx$ и приложенная к грани ab (γ — все единицы массы жидкости);

2) силы упругости T_1 и T_2, приложенные к граням bc и ad и, вследствие симметрии, равные между собой

Обозначая перемещения точек элемента в радиальном направлении y, получим относительное удлинение их первоначального расстояния от оси цилиндра равным $\frac{y}{R}$. Ввиду малости толщины стенок мы можем считать величины y для всех точек элемента равными и положить, что эти точки равноудалены от оси цилиндра.

Относительное увеличение длины окружности цилиндра на уровне взятого элемента будет также $\frac{y}{R}$. Поэтому напряжения, вызванные в стенках силами упругости, будут равны $E\frac{y}{R}$, где E — модуль упругости материала стенки.

Силы упругости

$$T_1 = T_2 = \frac{Ey}{R} D\,dx.$$

Равнодействующая всех сил, приложенных к элементу, будет:

$$dQ = \gamma x R\,d\varphi\,dx - T_1 \sin\frac{d\varphi}{2} - T_2 \sin\frac{d\varphi}{2},$$

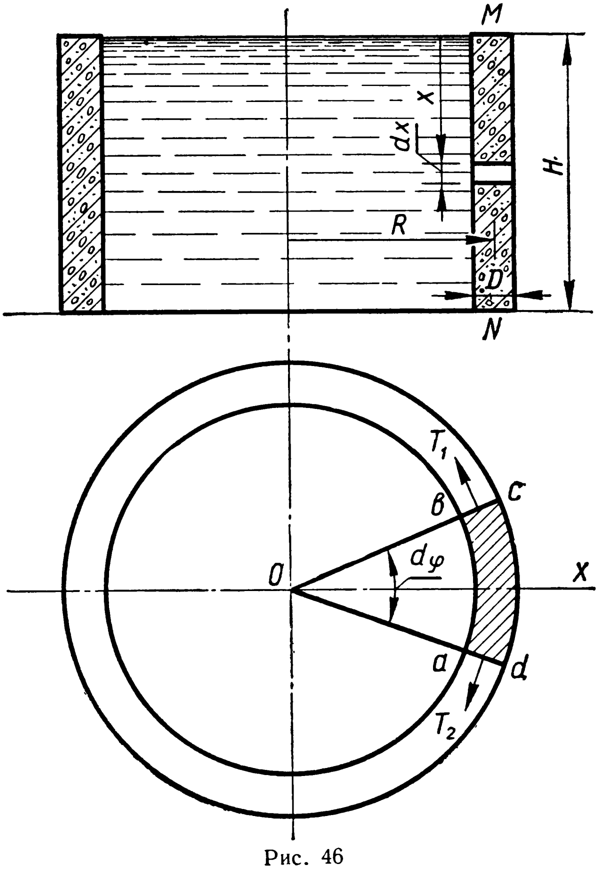

Рис. 46

или, считая приближенно,

$$\sin\frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2},$$

получаем:

$$dQ = \gamma x R\,d\varphi\,dx - \frac{yE}{R} D\,d\varphi\,dx.$$

Эта сила dQ представляет собой приращение поперечной силы, соответствующее приращению dx глубины элемента.

Известно, что изгибающий момент M и поперечная сила Q связаны соотношением:

$$\frac{dM}{dx}=Q,$$

а

$$M=EJ\frac{d^2y}{dx^2},$$

где J — момент инерции площади $abcd$ относительно ее нейтральной оси.

Тогда, учитывая вышеизложенное, получим:

$$E\frac{d^2}{dx^2}\left(J\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\gamma xRd\varphi-\frac{yE}{R}Dd\varphi. \tag{1}$$

Так как

$$J=\frac{D^3Rd\varphi}{12},$$

то после подстановки этого выражения в уравнение (1) и сокращения на $Rd\varphi$ получим:

$$\frac{ED^3}{12}\cdot\frac{d^4y}{dx^4}=\gamma x-\frac{yED}{R^2},$$

или

$$\frac{d^4y}{dx^4}+4\alpha^4y=m^4x, \tag{2}$$

где

$$\alpha^4=\frac{3}{R^2D^2},$$

$$m^4=\frac{12\gamma}{ED^3}$$

Общий интеграл полученного уравнения будет:

$$y=z+y_0,$$

где z — общий интеграл соответствующего однородного уравнения, y_0 — какое-либо частное решение уравнения (2).

Соответствующее однородное уравнение для (2) имеет вид:

$$\frac{d^4y}{dx^4}+4\alpha^4y=0.$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$r^4+4\alpha^4=0,$$

корни которого

$$r_1=(1+i)\,\alpha;\quad r_2=(1-i)\,\alpha;\quad r_3=(-1+i)\,\alpha \text{ и } r_4=(-1-i)\,\alpha.$$

Составляем общее решение уравнения (2):

$$z=C_1e^{\alpha x}\cos\alpha x+C_2e^{\alpha x}\sin\alpha x+C_3e^{-\alpha x}\cos\alpha x+C_4e^{-\alpha x}\sin\alpha x.$$

Частное решение уравнения (2) ищем методом неопределенных коэффициентов. Так как правая часть уравнения (2) представляет собой двучлен первой степени относительно x, то частное решение уравнения (2) ищем в такой же форме, т. е. полагаем

$$y_0 = Ax + B.$$

Здесь A и B — постоянные, подлежащие определению. Находим их в предположении, что $y_{\text{част}}$ есть решение уравнения (2). Дифференцируем $y_{\text{частн}}$ по x:

$$y_0' = A, \quad y_0'' = y_0''' = y_0^{(\mathrm{IV})} = 0.$$

Подставляем эти значения в уравнение (2):

$$4\alpha^4 (Ax + B) = m^4 x,$$

или

$$4\alpha^4 Ax + 4\alpha^4 B = m^4 x.$$

В этом тождестве приравнивая коэффициенты соответствующих степеней x, получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 4\alpha^4 A &= m^4, \\ 4\alpha^4 B &= 0, \end{aligned}\right\} \text{ откуда } \begin{aligned} A &= \frac{m^4}{4\alpha^4}, \\ B &= 0. \end{aligned}$$

Тогда частное решение уравнения (2) будет:

$$y_0 = \frac{m^4 x}{4\alpha^4}.$$

Таким образом, общее решение неоднородного линейного уравнения (2) будет иметь вид:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \alpha x + C_2 e^{\alpha x} \sin \alpha x + C_3 e^{-\alpha x} \cos \alpha x + C_4 e^{-\alpha x} \sin \alpha x + \frac{m^4 x}{4\alpha^4}.$$

Произвольные постоянные C_1, C_2, C_3 и C_4 могут быть определены из условий на концах вертикальной полоски MN, имеющей фигуру $abcd$ поперечным сечением.

В случае, например, когда резервуар имеет недеформирующееся днище, эти условия будут таковы: при $x = 0$; $y = 0$ и $y' = 0$ и при $x = H$; $y = 0$ и $y' = 0$, где H — высота цилиндрического резервуара.

Задача 65. *Рельс бесстыкового пути лежит на упругом основании и прогибается сосредоточенной силой P. Составить уравнение упругой линии рельса и определить стрелу прогиба в точке O (рис. 47).*

1) Реакция p упругого основания, рассчитанная на единицу длины рельса, пропорциональна прогибу — y, так что $p = -ny$, где n — коэффициент пропорциональности (коэффициент постели);

2) исходя из симметрии упругой линии относительно оси ординат, можно рассматривать только правую часть рельса, нагруженную силой $\frac{P}{2}$.

Решение

Определим изгибающий момент M для любого сечения $A(x, y)$ правой части рельса. Прогиб рельса — y представляет собой некоторую функцию x, определяемую уравнением упругой линии. Таким образом, реакция упругого основания p будет также функцией x:

$$p = -ny = f(x).$$

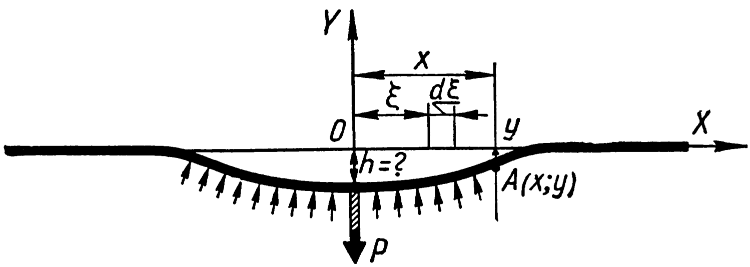

Рис. 47

На элемент $d\xi$ рельса (рис. 47) действует реакция $p \cdot d\xi = f(\xi)\,d\xi$. Момент реакции относительно сечения A будет $f(\xi)\,d\xi\,(x-\xi)$. Сумма же моментов всех элементарных реакций, действующих слева от сечения A на взятую нами правую часть рельса, равна $\int\limits_0^x (x-\xi) f(\xi)\,d(\xi)$. Момент сосредоточенной силы $\frac{P}{2}$ равен $-\frac{P}{2} \cdot x$. Изгибающий момент для данного сечения равен алгебраической сумме моментов относительно нейтральной оси всех внешних сил, приложенных к балке с одной стороны сечения (справа или слева от данного сечения). Отсюда изгибающий момент

$$M = \int\limits_0^x (x-\xi) f(\xi)\,d(\xi) - \frac{P}{2} x. \tag{1}$$

К уравнению (1) применим формулу дифференцирования по параметру под знаком интеграла:

$$\frac{d}{dx} \int\limits_u^v F(\xi, x)\,d\xi = \int\limits_u^v \frac{\partial F}{\partial x}\,d\xi + F(v, x)\frac{dv}{dx} - F(u, x)\frac{du}{dx}.$$

В нашем случае $u = 0$, $v = x$.

Кроме того,

$$F(\xi, x)=(x-\xi) f(\xi), \quad \frac{\partial F}{\partial x}=f(\xi).$$

Дифференцируя уравнение (1), получаем:

$$\frac{dM}{dx}=\frac{d}{dx}\int_0^x (x-\xi) f(\xi)\, d\xi-\frac{d}{dx}\left(\frac{P}{2}\cdot x\right)=$$

$$=\int_0^x f(\xi)\, d\xi+(x-x) f(x)\frac{dx}{dx}-(x-0) f(0)\frac{d}{dx}(0)-\frac{P}{2}=$$

$$=\int_0^x f(\xi)\, d(\xi)-\frac{P}{2}. \qquad (2)$$

Дифференцируя еще раз уравнение (2) и принимая во внимание, что теперь $F(\xi, x)=f(\xi)$ и $\frac{\partial F}{\partial x}=0$, получаем:

$$\frac{d^2M}{dx^2}=\frac{d}{dx}\int_0^x f(\xi)\, d\xi-\frac{d}{dx}\left(\frac{P}{2}\right)=\int_0^x 0\cdot d\xi+f(x)\frac{dx}{dx}-f(0)\frac{d}{dx}(0)-0=$$

$$=f(x)=p=-ny. \qquad (3)$$

Дифференциальное уравнение упругой линии:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EJ}. \qquad (4)$$

Уравнение (4) преобразуем к виду:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2}=M. \qquad (5)$$

Дифференцируя дважды уравнение (5), получим:

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^2M}{dx^2},$$

или на основании формулы (3):

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4}=-ny.$$

Перенесение всех членов в левую часть равенства приводит нас к уравнению:

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{n}{EJ}y=0.$$

Вводя обозначение $\frac{n}{EJ}=4k^4$, получим неполное линейное дифференциальное уравнение 4-го порядка в виде:

$$\frac{d^4y}{dx^4}+4k^4y=0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение будет:

$$r^4+4k^4=0.$$

Это уравнение решаем разложением левой части на квадратные множители нижеследующим образом:

$$r^4+4k^4+4r^2k^2-4r^2k^2=0,$$
$$(r^2+2k^2)^2-4r^2k^2=0,$$
$$(r^2+2k^2-2rk)(r^2+2k^2+2rk)=0.$$

Последнее уравнение равносильно системе:

$$\left.\begin{array}{l} r^2-2kr+2k^2=0, \\ r^2+2kr+2k^2=0. \end{array}\right\}$$

Определяем корни системы:

$$\left.\begin{array}{l} r_1=k+ik, \\ r_2=k-ik, \\ r_3=-k+ik, \\ r_4=-k-ik. \end{array}\right\}$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения упругой линии будет:

$$y=e^{kx}(C_1\sin kx+C_2\cos kx)+e^{-kx}(C_3\sin kx+C_4\cos kx).$$

Для определения неизвестных постоянных используем начальные условия.

1. В бесконечно удаленных от силы P точках практически прогиб и кривизна рельса равны нулю. Так как множитель e^{kx} возрастает при возрастании x, то в нашем уравнении не должно быть первого слагаемого $e^{kx}(C_1\sin kx+C_2\cos kx)$, что возможно при условии $C_1=C_2=0$.

Таким образом, уравнение упругой линии упростится и примет вид:

$$y=e^{-kx}(C_3\sin kx+C_4\cos kx).$$

2. В начальной точке $(x=0)$ касательная к упругой линии параллельна оси x, а поэтому $\frac{dy}{dx}=0$. Так как

$$\frac{dy}{dx}=-ke^{-kx}(C_3\sin kx+C_4\cos kx)+e^{-kx}(C_3k\cos kx-$$
$$-C_4k\sin kx),$$

то получим:

$$-ke^{-k\cdot 0}[C_3\sin(k\cdot 0)+C_4\cos(k\cdot 0)]+e^{-k0}[C_3k\cos(k\cdot 0)-$$
$$-C_4k\sin(k\cdot 0)]=0$$

и

$$C_3-C_4=0, \text{ т. е. } C_3=C_4.$$

Уравнение упругой линии принимает еще более простой вид:

$$y=C_3e^{-kx}(\sin kx+\cos kx). \qquad (6)$$

3. Для определения постоянной C_3 используем формулу (2) при $x=0$:

$$\left[\frac{dM}{dx}\right]_{x=0}=\int\limits_0^0 f(\xi)\,d\xi-\frac{P}{2}=-\frac{P}{2}. \tag{7}$$

Параллельно, дифференцируя уравнение упругой линии (5), получим:

$$\frac{dM}{dx}=EJ\frac{d^3y}{dx^3}. \tag{8}$$

Величину третьей производной для равенства (8) определяем из уравнения (6). Трижды дифференцируя (6), получаем:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=4C_3k^3e^{-kx}\cos kx. \tag{9}$$

Выражение (9) подставляем в уравнение (8). Отсюда

$$\frac{dM}{dx}=4C_3EJk^3e^{-kx}\cos kx.$$

При $x=0$

$$\left[\frac{dM}{dx}\right]_{x=0}=4C_3EJk^3. \tag{10}$$

Приравнивая выражения (7) и (10), получим:

$$4C_3EJk^3=-\frac{P}{2},$$

откуда

$$C_3=-\frac{P}{8EJk^3}.$$

Таким образом, уравнение упругой линии окончательно примет вид:

$$y=-\frac{P}{8EJk^3}e^{-kx}(\sin kx+\cos kx).$$

Стрела прогиба в середине рельсовой плети (при $x=0$)

$$h=-\frac{P}{8EJk^3},$$

где коэффициент

$$k=\sqrt[4]{\frac{n}{4EJ}}.$$

II. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. ПРИМЕРЫ НА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Легкое тело массы m падает с высоты 250 *м* под действием силы тяжести, встречая противодействие силы трения воздуха. Предполагая, что сила трения пропорциональна скорости (коэффициент пропорциональности k), установить:

1) через сколько секунд после начала падения тело достигнет земли;

2) закон движения $h=f(t)$.

Ответ:
$$t=\frac{m}{k}\ln\frac{g}{g-\frac{k}{m}v},$$
$$h=\frac{mg}{k}t-\frac{m^2g}{k^2}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

2. Шар M массы m падает свободно без начальной скорости под действием силы тяжести из точки O, которую примем за начало координат. Сопротивление воздуха F пропорционально скорости падения, т. е. $F=-kv$ (k — коэффициент пропорциональности). Найти закон движения шара.

Ответ:
$$y=\frac{g}{n}t-\frac{g}{n^2}(1-e^{-nt}).$$

3. Самолет начинает пикировать без начальной скорости. Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости. Найти зависимость между вертикальной скоростью в данный момент, пройденным путем y и максимальной скоростью пикирования.

Ответ:
$$v=v_{\max}\sqrt{1-e^{-\frac{2gy}{v^2_{\max}}}}.$$

4. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости движения:

а) диск, начавший вращаться с угловой скоростью 3 *об/сек*, через 1 *мин* вращается с угловой скоростью 2 *об/сек*. Какова будет его угловая скорость через 3 *мин* после начала вращения?

б) диск, начавший вращаться с угловой скоростью 5 *об/сек*, через 2 *мин* вращается с угловой скоростью 3 *об/сек*. Через сколько времени после начала вращения он будет обладать угловой скоростью, равной 1 *об/сек*?

Ответ: а) $\frac{8}{9}$ *об/сек*; б) через 6 *мин* 18 *сек*.

5. Капля воды, имеющая начальную массу M_0 грамм и равномерно испаряющаяся со скоростью m *г/сек*, движется по инерции с начальной скоростью v_0 *см/сек*. Сопротивление среды пропорционально скорости движения капли и ее радиусу. В начальный момент ($t=0$) оно равно f_0 *дин*. Найти зависимость скорости капли от времени.

$$\text{Ответ:}\quad v=v_0\left(1-\frac{m}{M_0}t\right)^{-1}\cdot e^{-\frac{3f_0}{mv_0}\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{m}{M_0}t}\right)}.$$

Примечание. Действующая сила F равна $\frac{d(mv)}{dt}$. Для решения этой задачи надо учесть, что масса m — переменная величина, зависящая от времени t; скорость v — искомая функция.

6. Найти расстояние, которое пройдет в t *сек* тело, брошенное вертикально вниз с начальной скоростью 30 *см/сек*.

$$\text{Ответ:}\quad s=\frac{1}{2}gt^2+30t.$$

7. Из точки, находящейся на высоте 18 *м* над уровнем земли, брошено вертикально вверх тело со скоростью 30 *м/сек*.

Найти высоту, на которой тело находится в момент t в функции от времени. Найти также наибольшую высоту, до которой поднимается тело.

$$\text{Ответ:}\quad 1)\ s=h=-\frac{1}{2}gt^2+30t+18;$$

$$2)\ h_{\text{макс}}\cong 63{,}9\ м.$$

8. Пуля проходит через доску в 7,5 *см* толщины, которая задерживает ее движение, сообщая ей постоянное отрицательное ускорение. Скорость пули в момент, когда она достигает доски, составляет 300 *м/сек*, а в момент, когда она из доски вылетает,— 150 *м/сек* Сколько времени заняло движение пули сквозь доску?

$$\text{Ответ:}\quad t=\frac{1}{3000}\ сек.$$

Примечание. По условию ускорение $w=-a$ (где a — постоянное положительное число).

9. Кислород проходит через трубку в бутылку емкостью в один литр, а смесь кислорода с воздухом вытекает через другую трубку. Если процесс идет настолько медленно, что в каждый момент можно считать газ в бутылке однородным, вычислить, сколько процентов кислорода будет содержать бутылка, после того как через нее пройдет 10 *л* газа (принимается, что воздух содержит 21% кислорода по объему).

Ответ: $p=99{,}9964\%$.

10. Если тело медленно погружается в воду, то его скорость v и ускорение w приближенно связаны уравнением $w=-g-kv$, где g и k — постоянные. Выразить пройденное телом расстояние в функции времени, если в момент $t=0$ тело находилось в покое.

Ответ: $s=\frac{g}{k}t-\frac{g}{k^2}(1-e^{-kt})$.

11. Паропровод диаметром 20 *см* защищен изоляцией толщиной 10 *см* ($k=0{,}00017$). Допуская, что труба имеет температуру 160°C, а внешняя поверхность защитного слоя 30°C, найти распределение температуры внутри слоя, а также количество тепла, отдаваемое паропроводом наружу в течение суток на протяжении 1 *м*.

Ответ: $T=592-187{,}6\ln r$; около 1 731 000 *кал*.

12. Влага, содержащаяся в свежеиспеченном хлебе, испаряется в окружающую среду со скоростью, пропорциональной количеству влаги в хлебе, а также разности влажности окружающего и насыщенного воздуха. Некоторое количество свежеиспеченного хлеба, содержащее 3 *кг* влаги, положено в помещение кубатурой 100 $м^3$, воздух которого первоначально имел влажность 25%. Насыщенный воздух при той же температуре содержит 0,12 *кг* влаги на 1 $м^3$. Если в течение первых суток хлеб потерял половину своей влаги, то сколько влаги в нем останется по истечении вторых суток?

Ответ: дифференциальное уравнение задачи

$$\frac{ds}{dt}=ks(s+6); \quad 0{,}82\ кг.$$

13. В течение какого времени хлеб (в предыдущей задаче) потеряет 90% своей влаги, если влажность 25% окружающего воздуха поддерживать постоянной при помощи вентиляции?

Ответ: 3 суток.

14. Дно резервуара вместимостью 300 *л* покрыто смесью соли и нерастворимого вещества.

Допуская, что скорость растворения соли пропорциональна разности между концентрацией в данный момент и концентрацией насыщенного раствора (1 *кг* соли на 3 *кг* воды) и что данное количество чистой воды растворяет $1/3$ *кг* соли в 1 *мин*, найти, сколько соли будет содержать раствор по истечении 1 часа.

Ответ: 18,1 *кг*.

15. Человек в среднем дышит 18 раз в 1 *мин*, выдыхая каждый раз 2000 *см*³ воздуха, содержащего 4% CO_2. Какой процент углекислоты будет содержать по истечении получаса воздух аудитории вместимостью 400 *м*³, если в ней находятся 50 человек и если вентиляторы доставляют в 1 *мин* 40 *м*³ свежего воздуха? (Свежий воздух содержит 0,04% CO_2.)

Ответ: 0,17%.

16. В торговое помещение вместимостью 10 000 *м*³ втекает через вентиляторы в 1 *мин* 1000 *м*³ свежего воздуха, содержащего 0,04% CO_2. В 9 часов утра в помещение входят служащие и через 30 мин. содержание CO_2 в воздухе повышается до 0,12%. Какой процент CO_2 можно ожидать в воздухе к 2 часам дня?

Ответ: 0,124%.

17. Цилиндрический резервуар с вертикальной осью имеет 6 *м* высоты и 4 *м* в диаметре. Во сколько времени спирт, заполняющий резервуар, вытечет из него через круглое отверстие радиуса $1/12$ *м*, сделанное в дне?

Ответ: $t=17{,}7$ *мин*.

18. Та же задача в предположении, что высота резервуара РВС-5000 равна 11,5 *м*, диаметр—23 *м*. Радиус отверстия — 15 *см*.

19. Два вертикальных резервуара, каждый из которых имеет 4 *м* высоты и 4 *м* в диаметре, поставлены рядом и соединены у дна коротким круглым шлангом диаметра $1/6$ *м*. Если вначале один резервуар наполнен водой, а другой пуст, то по истечении какого времени вода будет находиться в них на одном уровне? Принимается, что скорость протекания воды через шланг определяется, как скорость воды, вытекающей из отверстия под тем же давлением.

Ответ: $t=7{,}27$ *мин*.

20. В резервуар глубиной 4 *м*, имеющий в поперечном сечении квадрат со стороной 6 *м*, втекает нефть со скоростью 10 *м*³ в 1 *мин*. В какое время резервуар будет наполнен, если в то же время нефть вытекает из него через квадратное отверстие стороной в $1/12$ *м*, имеющееся в дне?

Ответ: $t=14{,}7$ *мин*.

Примечание. Дифференциальное уравнение задачи

$$\left\{\frac{1}{6}-0{,}6\sqrt{2gh}\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^2\right\}dt=36dh.$$

21. На дне котла, имеющего форму полушара радиуса $R=1$ *м*, образовалась щель площадью $\sigma=0{,}25$ *см²*. Найти время истечения всей воды из котла.

$$\text{Ответ:}\quad T=\frac{14\pi R^2}{15\sigma}\sqrt{\frac{R}{2g}}=7\ \textit{час}\ 19\ \textit{мин}\ 36\ \textit{сек}.$$

22. Скорость роста площади малого листа виктории-регии, имеющего форму круга, пропорциональна окружности листа и количеству солнечного света, падающего на лист. Последнее в свою очередь пропорционально площади листа и косинуса угла между направлением лучей и вертикалью. Найти зависимость между площадью листа S и временем t, если известно, что в 6 часов утра эта площадь равнялась 1600 *см²*, а в 6 часов вечера того же дня 2500 *см²*. (Полагать, что угол между направлением солнца и вертикалью равен 90° в 6 часов утра и в 6 часов вечера и 0° в полдень.)

Ответ: если t — время, отсчитанное от полуночи и выраженное в часах, то дифференциальное уравнение задачи имеет вид:

$$\frac{dS}{S\sqrt{S}}=k\cos\frac{\pi(t-12)}{12}\,dt;\quad \text{отсюда}\quad S=\frac{160000}{\left[9-\sin\frac{\pi(t-12)}{12}\right]^2}.$$

Функция $S(t)$ определена при $6\leqslant t\leqslant 18$ *час*.

23. Естественный прирост населения большого города пропорционален наличному количеству жителей и промежутку времени. Кроме того, население города увеличивается благодаря иммиграции: скорость прироста населения этим путем пропорциональна времени, отсчитываемому от момента, когда население города равнялось A_0. Найти зависимость числа жителей города от времени (считая процесс непрерывным).

$$\text{Ответ:}\quad A=\left(A_0+\frac{k_2}{k_1^2}\right)e^{k_1t}-\frac{k_2}{k_1}t-\frac{k_2}{k_1^2}.$$

24. Некоторое количество нерастворимого вещества содержит в своих порах 10 *кг* соли. Подвергая его действию 90 *л* воды, нашли, что в течение 1 часа растворилась половина содержавшейся в нем соли. Сколько соли растворилось бы в течение того же времени, если бы количество воды было удвоено? Скорость растворения пропорциональна количеству нерастворенной соли и разности между концентрацией раствора в данный момент и концентрацией насыщенного раствора (1 *кг* на 3 *л*).

Ответ: дифференциальное уравнение задачи

$$\frac{dx}{dt}=kx\left(\frac{10-x}{90}-\frac{1}{3}\right);\ 5{,}2\ \textit{кг}.$$

25. По закону Ньютона скорость охлаждения какого-либо тела в воздухе пропорциональна разности между температурами тела и воздуха. Известно, что температура тела в течение 20 мин. падает от 100 до 60°. Температура воздуха при этом равна 20°.

Через сколько времени (от момента начала охлаждения) температура тела понизится до 25°?

Ответ: через 1 *час* 20 *мин.*

26. Стена (коэффициент теплопроводности $k=0{,}0015$) имеет 30 *см* толщины (рис. 48). Найти, как зависит температура от

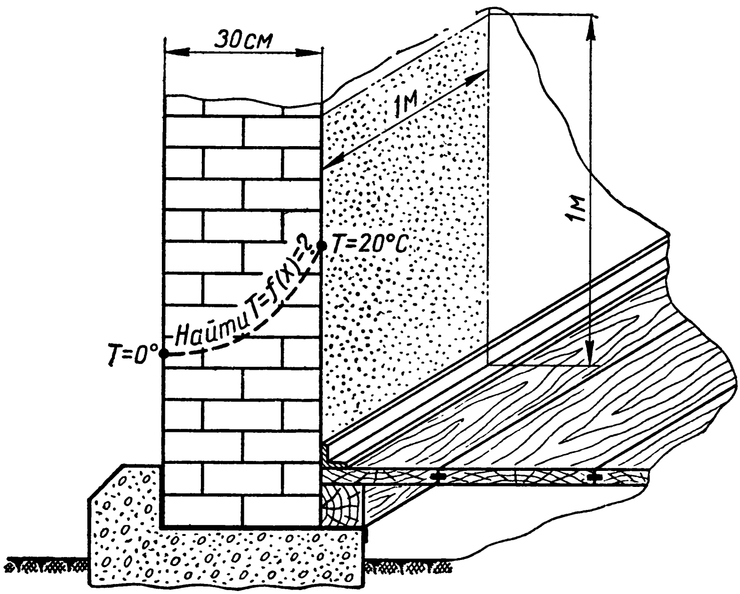

Рис. 48

расстояния точки от наружного края стены, если температура равна 20° на внутренней и 0° на внешней поверхности стены. Найти также количество тепла, которое стена (на 1 $м^2$) отдает наружу в течение суток.

Ответ: 1) $T=\frac{2}{3}x$; 2) 864 000 *кал.*

27. Цилиндрический сосуд высотой $H=20$ *см* и с площадью дна $S=120$ $см^2$ имеет на дне отверстие площадью $\sigma=0{,}4$ $см^2$. За какое время вытечет через это отверстие вода, заполняющая сосуд?

Указание: скорость истечения v определяется по формуле $v=\sqrt{2gh}$, где h — глубина погружения отверстия в данный момент.

$$\text{Ответ: } T=\frac{S}{\sigma}\sqrt{\frac{2H}{g}}\cong 1 \text{ мин.}$$

28. Коническая воронка с радиусом верхнего отверстия $R=20$ *см* и радиусом нижнего отверстия $r=0,3$ *см* и высотой $h=20$ *см* наполнена водой. В какое время эта вода вытечет из воронки?

$$\text{Ответ: } T=\frac{2}{5}\frac{R^2}{r^2}\sqrt{\frac{h}{2g}}\cong 65 \text{ сек.}$$

29. Допустим, что в вертикальном воздушном столбе давление на каждом уровне обусловлено давлением вышележащих слоев. Найти зависимость давления от высоты, если известно, что на уровне моря это давление равно 1 *кГ/см²* и 0,92 *кГ/см²* на высоте 500 *м*.

Указание: использовать закон Бойля — Мариотта, в силу которого плотность газа пропорциональна давлению.

Ответ: дифференциальное уравнение задачи

$$dp=-kp\,dh, \text{ откуда } p=e^{-0,00016\,h}.$$

30. Если движение воздуха от одного уровня к другому совершается адиабатически (т. е. теплота не приобретается и не теряется), то давление $p=k\rho^n$, где ρ — плотность и k — постоянная.

Допуская адиабатический характер распространения воздуха, найти высоту атмосферы, если на уровне моря плотность воздуха составляет 0,0013 *г* на 1 *см³*, а давление 1 *кГ/см²*.

Ответ: дифференциальное уравнение задачи

$$dp=-\frac{p^{\frac{1}{n}}}{k^{\frac{1}{n}}}\,dh.$$

Высота атмосферы 26,923 *км*.

31. Найти форму зеркала, отражающего пучок лучей, стремящихся сойтись в одной точке так, что после отражения все лучи пересекаются в некоторой другой точке.

Ответ: гиперболоид вращения. Дифференциальное уравнение $dr-dr'=0$.

32. Железное ядро (объемный вес $\gamma=7,25$) радиусом 2 *см* падает с высоты 1200 *м*. Через какое время и с какой скоростью ядро достигнет земли? Задачу решить: а) в предположении отсутствия сопротивления воздуха и б) при сопротивлении воздуха, пропорциональном квадрату скорости падения.

Указание: на тело, падающее в пустоте, действует сила притяжения Земли, которая сообщает ему ускорение $g = 9{,}81$ *м/сек*^{2}.

При сопротивлении воздуха возникает усилие, пропорциональное квадрату скорости падения.

При расчете принять

$$k = \frac{\psi \delta F}{2G},$$

где G — вес тела в *кГ*,

δ — 1,293 — вес 1 *м*^{3} воздуха в *кГ*,

F — перпендикулярное к направлению движения наибольшее поперечное сечение тела в *м*^{2},

ψ — постоянное число, зависящее от формы тела; для шара $\psi = 0{,}5$.

Ответ: для случая а) $t = 15{,}64$ *сек*, $v = gt = 153{,}4$ *м/сек*;

б) $t = 21{,}04$ *сек*, $v = 75{,}92$ *м/сек*.

33. Деревянный шар (удельный вес $\gamma = 0{,}9$) радиусом $r = 3$ *см* падает: а) с высоты $h = 100$ *м*, б) с высоты $h = 20$ *м*. Найти время падения и конечную скорость.

Ответ: а) время $t = 5{,}21$ *сек*; $v = 30{,}19$ *м/сек*;
б) » $t = 2{,}08$ *сек*; $v = 18{,}16$ *м/сек*.

34. Найти суточную потерю тепла (в калориях) паропроводом, транспортирующим пар температурой 100°С. Длина паропровода 20 *м*, диаметр 30 *см*. Паропровод защищен слоем бетона толщиной 10 *см*. Температура внешней поверхности бетона 35°С. Найти также температуру в середине бетонного слоя (принять коэффициент пропорциональности $k = 225 \cdot 10^{-5}$ *кал/см·град·сек*).

Указание: количество (в *кал/сек*) выделяемого источником площадью A *см*^{2} тепла

$$q = -kA\frac{du}{dx},$$

где x — радиус цилиндрического источника тепла,

u — температура по Цельсию,

k — коэффициент пропорциональности.

Величина $\frac{du}{dx}$ представляет собой температурный градиент.

Ответ: $3{,}11 \cdot 10^8$ *кал/сутки*; 63,4°С.

35. Сферический резервуар диаметром $D = 2{,}75$ *м* наполнен водой. Найти время, необходимое для истечения всей воды через круглое отверстие в днище диаметром $d = 3{,}7$ *см*. Коэффициент пропорциональности $k = 4{,}8$.

Ответ: 57,6 *мин* $\approx$ 58 *мин*.

36. Цилиндрический резервуар с горизонтальной осью имеет длину 6 *м* и диаметр 4 *м*. Через какой промежуток времени вода, заполняющая резервуар, вытечет из него через круглое отверстие радиуса $1/12$ *м*, сделанное в дне?

Ответ: 18,5 *мин*.

37. Количество света, поглощающегося при прохождении через тонкий слой воды, пропорционально толщине слоя и количеству света, падающего на его поверхность. Если при прохождении через слой толщиной 3 *м* поглощается половина первоначального количества света, то какая часть этого количества дойдет до глубины 30 *м*?

Ответ: $\frac{1}{1024}$.

38. По шероховатой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha=30°$, спускается тяжелое тело без начальной скорости. Определить, в течение какого времени T тело пройдет путь длиной $L=39{,}2$ *м*, если коэффициент трения $\mu=0{,}2$.

Ответ: уравнение движения $m\frac{dx}{dt}-mg(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)=0$;

$$T=\sqrt{\frac{2L}{g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}}=4{,}94\approx 5 \text{ сек.}$$

2. ПРИМЕРЫ НА РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

39. В некоторой химической реакции вещество C разлагается на два вещества — x и y. Скорость образования каждого из продуктов разложения пропорциональна наличному количеству вещества C. Найти зависимость x и y от времени, если в начале процесса $C=1$, $x=0$, $y=0$, а по истечении 1 часа $C=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{8}$, $y=\frac{3}{8}$.

Ответ: $x=\frac{1}{4}(1-2^{-t})$; $y=\frac{3}{4}(1-2^{-t})$.

40. В некоторой химической реакции вещество x преобразуется в вещество y со скоростью, пропорциональной наличному количеству x. В то же время образовавшееся вещество y посредством обратной реакции переходит в вещество x со скоростью, пропорциональной наличному количеству y. Химический анализ дал такие результаты:

$$t=0,\ 3,\ \infty;$$
$$x=10,\ 6,\ 5{,}5;$$
$$y=0,\ 4,\ 4{,}5.$$

Найти зависимость x и y от времени.

Ответ: $y=4{,}5(1-e^{-0{,}7324t})$; $x=10-y$.

41. Преобразование радиоактивных веществ происходит со скоростью, пропорциональной наличному количеству данного вещества. RaB преобразуется в RaC с такой скоростью, что половина количества RaB оказывается преобразованной по истечении 27 мин. В свою очередь половина данного количества RaC преобразуется в другое вещество в течение 19,5 мин. Принимая первоначальное количество RaB за единицу, найти, какое количество RaB и RaC будем иметь по истечении 1 часа.

Ответ: RaB=0,124; RaC=0,249.

42. Скорость роста культуры микроорганизмов пропорциональна их количеству и количеству питательных веществ (коэффициент пропорциональности равен k). Скорость убывания питательных веществ пропорциональна наличному количеству микроорганизмов и времени (коэффициент пропорциональности равен k_1). В начале опыта в сосуде имелось A_0 *г* микроорганизмов и B_0 *г* питательных веществ. Найти зависимость количества A микроорганизмов и количества B питательных веществ от времени.

Ответ:

$$A=\frac{k\alpha^2}{2k_1}\left[1-\left(\frac{1-\beta e^{\alpha kt}}{1+\beta e^{\alpha kt}}\right)^2\right],$$

$$B=\alpha\cdot\frac{1-\beta e^{\alpha kt}}{1+\beta e^{\alpha kt}},$$

где

$$\alpha=\sqrt{B_0^2+\frac{2k_1}{k}A_0},\quad \beta=\frac{\alpha+B_0}{\alpha-B_0}.$$

3. ПРИМЕРЫ НА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

43. Материальная точка массы m движется по прямой линии к центру, притягивающему ее с силой $\frac{mk^2}{r^3}$, где r — расстояние точки от центра. Если движение начинается с состояния покоя при $r=a$, найти время, по истечении которого точка достигнет центра.

Ответ: $t=\frac{a^2}{k}$.

44. Моторная лодка весом 300 *кГ* движется прямолинейно с начальной скоростью 16 *м/сек*. Сопротивление воды пропорционально скорости лодки и равно 10 *кГ* при скорости 1 *м/сек*. Какое расстояние пройдет лодка, прежде чем ее скорость станет 8 *м/сек*, и в какое время она пройдет это расстояние?

Ответ: $s=25$ *м*; $t=2{,}1$ *сек*.

45. Тяжелое тело скользит по шероховатой наклонной плоскости, причем угол наклона равен α, а коэффициент трения μ. Найти закон движения, если начальная скорость равна нулю.

Ответ: $s=\frac{1}{2}g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)t^2$.

46. Определить скорость, с которой метеор ударяется о Землю, если он падает прямолинейно с неограниченно большого расстояния из состояния покоя; при его движении к Земле ускорение обратно пропорционально квадрату его расстояния от центра Земли. Длина Земного радиуса $r_1\cong 6377$ *км* $=6{,}377\cdot 10^6$ *м*.

Ответ: $v=\sqrt{2gr_1}=11\,180\,\frac{м}{сек}\approx 11\,\frac{км}{сек}$.

47. Найти время, нужное метеору для того, чтобы достичь Земли с высоты 400 000 *км*.

Ответ: дифференциальное уравнение задачи

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{k}{r^2}, \text{ причем } k=g\,(6400)^2;$$

$$t\simeq 122 \text{ часа}.$$

48. Цепь переброшена через гладкий гвоздь так, что с одной стороны свисает часть ее длиной в 8 *м*, а с другой стороны часть длиной в 10 *м*. При скольжении ускорение пропорционально разности длин частей цепи, свисающих с обеих сторон. Через какое время соскользнет цепь?

Ответ: $t=\frac{3}{\sqrt{g}}\ln(9+\sqrt{80})\approx 2{,}76$ *сек*.

49. Материальная точка движется по прямой линии к точке A таким образом, что ускорение ее на расстоянии от A равно $kr^{-\frac{5}{3}}$. В начальный момент $t=0$ движущая точка находилась в покое на расстоянии l от точки A. Когда она достигнет точки A?

50. Сопротивление, оказываемое воздухом падающему телу, вызывает отрицательное ускорение $-kv^2$, где v — скорость тела, а k — постоянная. Показать, что снаряд, выпущенный вертикально вверх со скоростью v_1, возвратится к исходной точке со скоростью

$$v_2=\sqrt{\frac{gv_1^2}{g+kv_1^2}},$$

где g — ускорение силы тяжести.

Указание: дифференциальное уравнение движения тела вверх

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mv\frac{dv}{ds}=-mg-kv^2.$$

Падение происходит по закону

$$mv\frac{dv}{ds}=-mg+kv^2.$$

51. Катер движется в спокойной воде со скоростью $v=10$ *км/час*. На полном ходу его мотор был выключен, и через $t=20$ *сек* скорость катера уменьшилась до $v_1=6$ *км/час*. Считая, что сопротивление воды движению катера пропорционально его скорости, найти:

а) скорость катера через 2 *мин* после остановки мотора;

б) расстояние, пройденное катером в течение первой минуты после остановки мотора.

Ответ: $v_2=0{,}467$ *км/час*; $s=85{,}2$ *м*.

52. Допустим, что через земной шар проложен узкий трубопровод, проходящий через центр Земли. Упавший в него камень притягивается центром Земли с силой, прямо пропорциональной расстоянию между ними. Во сколько времени камень пролетит сквозь всю Землю?

Примечание: дифференциальное уравнение движения

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-k^2\cdot r,\ \text{где}\ k^2=\frac{g}{6400}.$$

Ответ: $t=\frac{\pi}{k}$ *сек* $\approx 42{,}3$ *мин*.

53. Найти закон движения тела, свободно падающего без начальной скорости, допуская, что сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и что скорость имеет своим пределом величину 75 *м/сек*.

Ответ: $s=\frac{(75)^2}{g}\ln\left\{\frac{e^{\frac{gt}{75}}+e^{\frac{-gt}{75}}}{2}\right\}.$

54. Тело медленно погружается в жидкость. Сопротивление пропорционально скорости. Найти закон движения тяжелой материальной точки, погружающейся в жидкость без начальной скорости.

Ответ: $s=\frac{m^2g}{k^2}\left(e^{-\frac{k}{mt}}-1\right)+\frac{mg}{k}t.$

55. Частица массы в 1 *г* движется по прямой к точке A под действием некоторой силы притяжения, пропорциональной расстоянию ее от точки A На расстоянии 1 *см* действует сила 0,1 дины. Сопротивление среды пропорционально скорости движения и равно 0,4 дины при скорости 1 *м/сек*. В момент $t=0$ частица расположена на 10 *см* правее точки A и скорость ее равна нулю.

Найти зависимость расстояния от времени и вычислить это расстояние для $t=3$ *сек* (с точностью до 0,01 *см*).

Ответ: $s=e^{-0,2t}[10\cos(0,245t)+8,16\sin(0,245t)]$;
$s|_{t=3}\approx 7,07$ *см*.

56. На консольную балку длины l с закрепленным концом O действуют равномерно распределенная нагрузка q *кГ* на погонную единицу длины и сосредоточенная сила P, приложенная к концу балки A. Составить уравнение упругой линии и определить прогиб балки в точке A (рис. 49). Жесткость балки EJ.

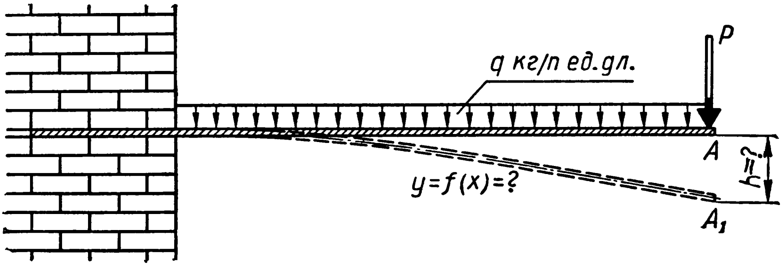

Рис. 49

Ответ: 1) $y=\frac{P}{2EJ}\left(lx^2-\frac{x^3}{3}\right)+\frac{ql}{2EJ}\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{l^3}{12}\right)$;

2) прогиб конца балки $h_A=\frac{l^3}{3EJ}\left(P+\frac{3ql}{8}\right)$.

57. Составить закон падения тела в воздухе, считая сопротивление воздуха пропорциональным квадрату скорости движения, если в начальный момент тело находилось в состоянии покоя.

Ответ: $$s=\frac{m}{k}\ln\frac{e^{t\sqrt{\frac{gk}{m}}}+e^{-t\sqrt{\frac{gk}{m}}}}{2}.$$

58. Консольная балка длиной l (рис. 50) нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q на погонную единицу длины. Составить уравнение упругой линии и определить величину прогиба h конца балки B.

Ответ: 1) $y=\frac{q}{24EJ}(6l^2x^2-4lx^3+x^4)$;

2) прогиб конца балки $h_B=\frac{ql^4}{8EJ}$.

59. Определить закон движения материальной частицы массы m под влиянием силы, направленной к центру O и прямо пропорциональной удалению x частицы от центра притяжения O. Материальная частица колеблется в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости движения v. Исследовать 3 случая:

1) коэффициент сопротивления h невелик по сравнению с коэффициентом восстановления k^2 $\left(k^2=\frac{a}{m}\right)$, так что

$$h^2-k^2<0;$$

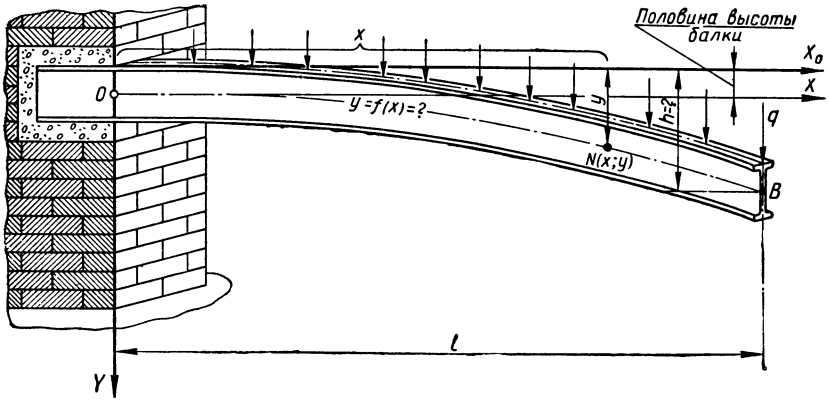

Рис. 50

2) величина

$$h^2-k^2>0;$$

3) величина

$$h^2-k^2=0.$$

Ответ: 1) $x=Ae^{-ht}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$.

Затухающее колебание с начальной амплитудой A, периодом T и начальной фазой φ. Множитель e^{-ht} характеризует быстроту затухания.

2) $x=C_1e^{-(h-q)t}+C_2e^{-(h+q)t}$,

где $q=\sqrt{h^2-k^2}$.

Апериодическое движение

3) $x=e^{-ht}(C_1+C_2t)$.

Специальный случай апериодического движения.

60. Определить закон и период колебаний маятника в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости качания v.

Ответ: 1) $s=\frac{ah}{p\cos\varphi}e^{-ht}\cdot\sin(pt+\varphi)$ — затухающее колебание,

где

$h=\frac{b}{2m}$ — коэффициент сопротивления,

$$p=\frac{1}{2m}\sqrt{\frac{4m^2g-lb^2}{l}};\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{p}{h}.$$

2) период $T=4m\pi\sqrt{\frac{l}{4m^2g-lb^2}}$.

61. Плотина высотой $H=2$ *м* состоит из ряда вертикальных деревянных столбов (рис. 51) с дощатой обшивкой и закрепленных в нижних концах. Расстояние между осями двух смежных столбов $c=1$ *м*. Момент инерции площади поперечного сечения столба относительно нейтральной оси $J=9000$ *см*^{4}. Составить уравнение упругой линии деформированного под напором воды

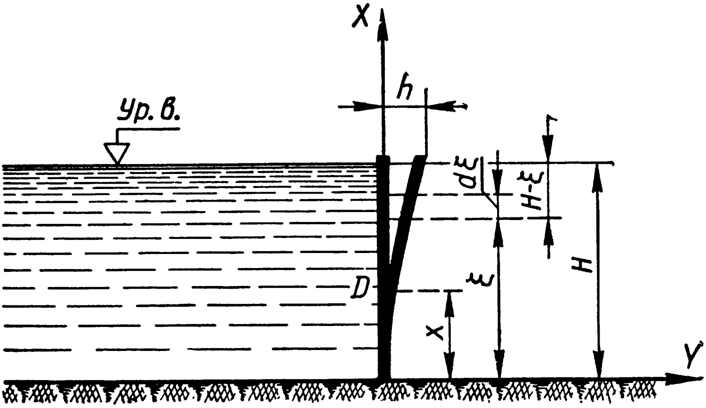

Рис. 51

столба и определить прогиб h верхнего конца столба, если вода доходит до верхнего края плотины. Модуль упругости дерева $E=10^5$ *кг/см*^{2}.

Указание: давление, передаваемое элементарной полоской высотой $d\xi$ на каждый столб, будет $q=c(H-\xi)\,d\xi$.

Ответ: $y=\frac{Q}{60EJH^2}[(H-x)^5+5H^4x-H^5]$,

$$h=\frac{QH^2}{15EJ}\cong 1{,}2 \text{ см}.$$

Здесь Q — общая нагрузка столба.

62. Материальная точка массы m притягивается каждым из двух центров с силой, пропорциональной расстоянию x. Коэффициент пропорциональности равен k, расстояние между двумя центрами $2b$.

В начальный момент ($t=0$) точка находится на линии соединения центров на расстоянии $x=c$ от ее середины. Начальная скорость $\frac{dx}{dt}$ равна нулю. Найти закон движения.

Ответ: дифференциальное уравнение движения (начало координат в середине расстояния между центрами)

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=k(b-x)-k(b+x)=-2kx.$$

Закон движения

$$x=c\cos\left\{\sqrt{\frac{2k}{m}}\cdot t\right\}.$$

63. Составить уравнение переходной кривой железнодорожного пути, переходящего от прямого направления к круговой кривой. Длина переходной кривой L, радиус сопрягаемой круговой кривой R.

Указание: переходная кривая устраивается для плавности перехода подвижного состава с прямого пути на криволинейный (круговую кривую). Кривизна переходной кривой равномерно переходит от кривизны прямолинейного пути, равной нулю, к кривизне кругового пути, равной $\frac{1}{R}$.

Ответ: $y=\frac{x}{6RL}$.

64. Тело совершает 90 колебаний в минуту. В течение 15 *сек* амплитуда колебания уменьшается вдвое. Найти дифференциальное уравнение движения.

Указание: движение характеризуется законом

$$x=Ae^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta).$$

Согласно условию $T=\frac{2\pi}{\beta}$ или $\beta=3\pi$;

далее

$$e^{-15\alpha}=\frac{1}{2} \text{ и } \alpha=\frac{\ln 2}{15}.$$

Ответ: $\frac{d^2x}{dt^2}+0{,}092\frac{dx}{dt}+88{,}8\,x=0.$

65. На тело весом 10 *кГ* действует упругая сила, стремящаяся вернуть его к положению устойчивого равновесия. Сила пропорциональна смещению и равна 2 *кГ* при смещении в 1 *м*. Сопротивление среды пропорционально скорости. Амплитуда после трех колебаний уменьшается в 10 раз. Найти период колебаний.

Указание: предполагаем закон движения в форме, как в предыдущей задаче. Дифференцируя, находим:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\alpha\frac{dx}{dt}+(\alpha^2+\beta^2)\,x=0.$$

С другой стороны, по условию:

$$\frac{10}{g}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+k\frac{dx}{dt}+2x=0.$$

Сравнивая, получаем: $\alpha^2+\beta^2=\frac{g}{5}$;

кроме того, $e^{-\alpha\cdot 3T}=e^{-\alpha\cdot\frac{6\pi}{\beta}}=\frac{1}{10}$, откуда $6\pi\frac{\alpha}{\beta}=\ln 10$.

Ответ:

период колебаний $T=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{g}}\sqrt{(6\pi)^2+\ln^2 10}$.

66. Круглый диск радиуса a, погруженный в жидкость, вращается около оси, проходящей через его центр перпендикулярно к его плоскости. Сопротивление, происходящее от трения, равно kv на единицу площади в каждой точке диска, причем v есть скорость данной точки и k — постоянная. Найти закон движения при начальной угловой скорости ω_0, допуская, что момент силы трения, обусловленной осью, равен постоянной величине K.

Указание: момент инерции диска равен $\frac{mr^2}{2}$, где m — его масса.

Элементарный момент силы трения есть $-kr\cdot\frac{d\Theta}{dt}r\cdot rdrd\varphi$, где $rdrd\varphi$ — элемент площади диска в полярной системе координат. Полный момент равен

$$-k\frac{d\Theta}{dt}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a r^3dr=-\frac{k\pi}{2}a^4\frac{d\Theta}{dt}.$$

Ответ: дифференциальное уравнение движения с учетом трения

$$\frac{ma^2}{2}\frac{d^2\Theta}{dt^2}=-\frac{k\pi}{2}a^4\frac{d\Theta}{dt}-K;$$

$$\Theta=\frac{m}{\pi ka^2}\left(\omega_0+\frac{2K}{\pi k\cdot a^4}\right)\left(1-e^{-\frac{\pi ka^2}{m}\cdot t}\right)-\frac{2K}{\pi ka^4}t.$$

67. Если ось вала турбины расположена горизонтально, а центр тяжести диска, насаженного на вал, не лежит на оси, то прогиб y (рис. 52) оси вала при его вращении удовлетворяет уравнению

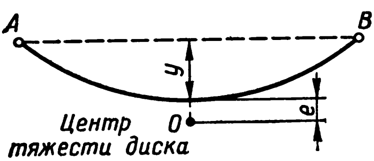

Рис. 52

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\left(\frac{1}{m\alpha}-\omega^2\right)y=g\cos\omega t+\omega^2e,$$

где m — масса диска,

α — постоянное число, зависящее от рода закрепления концов A и B,

ω — угловая скорость вращения,

e — эксцентриситет центра тяжести диска.

Найти общий интеграл этого уравнения.

Ответ: если $\frac{1}{m\alpha} > \omega^2$, то

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{g}{k^2 - \omega^2} \cos \omega t + \frac{e\omega^2}{k^2},$$

$$\text{где } k^2 = \frac{1}{m\alpha} - \omega_2;$$

$$\text{если } \frac{1}{m\alpha} < \omega^2, \text{ то}$$

$$y = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt} - \frac{g}{k^2 + \omega^2} \cos \omega t - \frac{e\omega^2}{k^2},$$

$$\text{где } k^2 = \omega^2 - \frac{1}{m\alpha}.$$

68. Колонна длиной l с неподвижно закрепленным нижним концом нагружена силой P. Под действием силы P верхний конец отклонился на расстояние a от своего первоначального положения. Найти изгибающий момент и форму изогнутой колонны.

Подставляя координаты верхнего конца, убедиться, что критический груз

$$P_{\text{крит}} = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 EJ.$$

Указание: нижний конец колонны принимаем за начало координат, колонну — за ось x.

Полагая $p = \frac{dy}{dx}$, получаем дифференциальное уравнение формы изгиба:

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = EJ\, p \cdot \frac{dp}{dy} = M = P\,(a - y).$$

Ответ: 1) $y = a\left(1 - \cos \sqrt{\frac{P}{EJ}}\, x\right)$;

2) так как колонна выдерживает груз при $x = l$, $y = a$,

то получаем $P = EJ\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2$.

69. Горизонтальная трубка вращается около вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Шар, помещенный внутри трубки, скользит по ней без трения. Найти закон движения шара, если в начальный момент он находится на оси вращения и имеет скорость v_0 (вдоль трубки).

Указание: дифференциальное уравнение движения есть

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \omega^2 r.$$

Начальные условия: $r = 0$, $\frac{dr}{dt} = v_0$ при $t = 0$.

Ответ: $r = \frac{v_0}{2\omega}\,[e^{\omega t} + e^{-\omega t}]$.

70. Материальная точка массы m притягивается каждым из двух центров с силой, пропорциональной расстоянию. Множитель пропорциональности равен k. Расстояние между центрами равно $2b$. В начальный момент точка находится на линии соединения центров на расстоянии c от ее середины. Начальная скорость равна нулю. Найти закон движения.

Ответ: дифференциальное уравнение движения (начало координат в середине между центрами):

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=k(b-x)-k(b+x)=-2kx.$$

Начальные условия $x=c$, $\frac{dx}{dt}=0$ при $t=0$;

$$x=a\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t.$$

71. Тело весом 2 *кГ*, брошенное вертикально вверх со скоростью 20 *м/сек*, испытывает сопротивление воздуха, которое при скорости v *м/сек*, выраженное в килограммах, равно $0{,}04\,v$; $g=9{,}8$ *м/сек*^{2}. Найти, через сколько секунд тело достигнет наивысшего положения.

Ответ: дифференциальное уравнение задачи

$$m\frac{d^2s}{dt^2}+k\frac{ds}{dt}+mg=0;\quad t=1{,}7\ \textit{сек}.$$

72. Тело весом P, брошенное с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, движется под влиянием силы тяжести и сопротивления воздуха R. Определить наибольшую высоту h тела над уровнем начального положения, считая сопротивление пропорциональным первой степени скорости: $R=kPv$.

Ответ: дифференциальное уравнение задачи

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+mg+\frac{dy}{dt}kP=0;$$

$$h=\frac{v_0\sin\alpha}{gk}-\frac{1}{gk^2}\ln(1+kv_0\sin\alpha).$$

73. Тело весом 1,96 *кГ*, подвешенное на пружине, которая силой 1 *кГ* растягивается на 20 *см*, при движении встречает сопротивление, пропорциональное первой степени скорости и при скорости 1 *см/сек* равное 0,02 *кГ*. В начальный момент пружина растянута из положения равновесия на 5 *см*, и тело приходит в движение без начальной скорости. Определить движение тела.

Ответ: дифференциальное уравнение задачи

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+k\frac{dx}{dt}+cx=0;$$

$$x=5e^{-5t}(5t+1)\ \textit{см}.$$

74. Найти уравнение продольного изгиба стержня, имеющего форму усеченного конуса, заделанного одним концом и сжимаемого силой P. Найти критическую силу, если радиус нижнего основания конуса $R=2r$ (r — радиус верхнего основания).

Ответ: $P_{\text{кр.}}=\dfrac{17{,}8\cdot EJ}{l^2}$.

4. ПРИМЕРЫ НА РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

75. Снаряд вылетает из орудия со скоростью v_0, направленной под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить его движение.

Ответ:
$$x=v_0t\cos\alpha;$$
$$y=v_0t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2.$$

76. Снаряд вылетает из орудия со скоростью 800 *м/сек* под углом 45° к горизонту. Найти, пренебрегая сопротивлением воздуха, наибольшую высоту, на которую поднимается снаряд, и место его падения.

Ответ: $h_{\text{макс}}=16{,}3$ *км*; $s\cong 65$ *км*.

III. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Глава 4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Наиболее общий вид дифференциального уравнения первого порядка и первой степени

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{1}$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — функции x и y

§ 1. Уравнения 1-го порядка, разрешенные относительно производной

1. Если уравнение (1) разрешить относительно производной, то оно примет вид:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = f(x, y). \tag{1а}$$

Общее решение (1*а*) имеет вид:

$$y = F(x, C), \tag{1б}$$

где C — постоянная.

2. Простейший частный вид уравнения (1*а*)

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{1в}$$

решается непосредственным интегрированием:

$$y = \int f(x)\,dx + C. \tag{1г}$$

§ 2. Уравнения с разделяющимися переменными

1) Если функции M и N представлены в виде

$$M(x, y) = f_1(x)\cdot\varphi_1(y); \quad N(x, y) = f_2(x)\cdot\varphi_2(y),$$

то уравнение (1) примет вид:

$$f_1(x)\cdot\varphi_1(y)\,dx + f_2(x)\cdot\varphi_2(y)\,dy = 0. \tag{2}$$

Делим уравнение (2) на $f_2(x)\cdot\varphi_1(y)$ (если это возможно) и приводим уравнение (1) к виду:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}\,dy = 0,$$

или, иначе,

$$R(x)\,dx + S(y)\,dy = 0, \tag{3}$$

где переменные x и y разделены.

Общий интеграл уравнения (3):

$$\int R(x)\,dx + \int S(y)\,dy = C. \tag{4}$$

2) Если $\varphi_1(y)$ и $f_2(x)$ равны единице, то имеет место простейшее дифференциальное уравнение с разделенными переменными, общий интеграл которого получается непосредственным интегрированием:

$$\int f_1(x)\,dx + \int \varphi_2(y)\,dy = C.$$

§ 3. Однородные уравнения

Однородной функцией $f(x, y)$ называется функция, удовлетворяющая условию:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y), \tag{5}$$

где λ — произвольное число;

n — степень однородности.

Интегрирование однородного уравнения вида (1) производится методом подстановки.

Если $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными функциями своих аргументов одинаковой степени и предполагаются непрерывными вместе со своими частными производными первого порядка, то уравнение (1) сводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой

$$y = vx, \tag{6}$$

$$\text{следовательно, } dy = v\,dx + x\,dv. \tag{7}$$

§ 4. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение (1) будет уравнением в полных дифференциалах, если существует такая функция $F(x, y)$, что

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy \equiv dF(x, y). \tag{8}$$

Условие

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{9}$$

является необходимым и достаточным, для того чтобы уравнение (1) было уравнением в полных дифференциалах.

Общий интеграл уравнения (8):

$$\int dF(x, y) = F(x, y) + C. \tag{10}$$

Функция $F(x, y)$ может быть найдена двумя способами:

1) по формуле:

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi, y)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0, \eta)\,d\eta, \tag{11}$$

где x_0 и y_0 произвольны. Они выбираются так, чтобы M и N оставались конечными при $x=a$ и $y=b$. Обычно a и b берутся равными 0 или 1.

2) интегрируя уравнение

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0,$$

получаем:

$$\int M(x, y)\,dx + \int N(x, y)\,dy = C.$$

В первом и втором интегралах получатся одинаковые члены при интегрировании соответственно постоянной величины на дифференциал переменной. Один из них отбрасывается, и тогда

$$F(x, y) = C.$$

Иначе, общее решение может быть найдено по формулам:

$$\int M(x, y)\,dx + \int \left[N(x, y) - \int \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}\,dx\right] dy = C_1 \qquad (11a)$$

или

$$\int N(x, y)\,dy + \int \left[M(x, y) - \int \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}\,dy\right] dx = C_2. \qquad (11б)$$

Интегрирующий множитель

Левая часть уравнения (1), не являющаяся полным дифференциалом какой-то функции $F(x, y)$, при умножении на интегрирующий множитель μ обращается в уравнение в полных дифференциалах:

$$\mu M(x, y)\,dx + \mu N(x, y)\,dy = 0, \qquad (8a)$$

и тогда

$$\frac{\partial \mu M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \mu N(x, y)}{\partial x}. \qquad (9a)$$

Интегрирующий множитель $\mu=\mu(x, y)$ удовлетворяет уравнению:

$$N(x, y)\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M(x, y)\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}, \qquad (12)$$

причем любое частное решение этого уравнения является интегрирующим множителем.

Общий вид интегрирующего множителя уравнения (8а) будет $\mu=\mu f(F)$, где f — дифференцируемая функция.

Отыскание интегрирующего множителя не всегда практически выполнимо. Рассмотрим некоторые случаи простого определения интегрирующего множителя:

Случай 1. Функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ однородные одного измерения:

$$\mu = \mu(x, y) = \frac{1}{M(x, y)\,x + N(x, y)\,y}. \qquad (13)$$

Случай 2. а) Отношение $\dfrac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N(x, y)} = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — функция только от x. Тогда:

$$\mu = e^{\int \varphi(x)\,dx}. \qquad (14)$$

б) Если $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial x}-\dfrac{\partial N}{\partial y}}{M\,(x,\ y)}=\psi\,(y)$,

где $\psi\,(y)$ — функция только одного y, то

$$\mu=e^{\int \psi\,(y)\,dy}. \tag{15}$$

Случай 3. Если $\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}=N\,(x,\ y)\,\varphi\,(x)-M\,(x,\ y)\,\psi\,(y)$,

то интегрирующий множитель

$$\mu=e^{\int \varphi\,(y)\,dx\,+\,\int \psi\,(b)\,dy}. \tag{16}$$

§ 5. Линейные уравнения

Уравнение (1), разрешенное относительно производной y' и принявшее вид

$$y'+P\,(x)\,y=Q\,(x), \tag{17}$$

называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. При отсутствии члена $Q\,(x)$, т. е. при $Q\,(x)\equiv 0$, уравнение (17) называется однородным.

Неизвестная функция y и ее производная входят линейно, т. е. в первой степени. В частном случае переменные величины $P\,(x)$ и $Q\,(x)$ или одна из них могут быть постоянными. Тогда уравнение (17) в первом предположении примет вид:

$$y'+Py=Q. \tag{18}$$

Общий интеграл уравнения (17) находится следующими способами:

1) Подстановкой Бернулли $y=uz$, и, следовательно, $dy=udz+zdu$, где u и z — неизвестные функции x. Они определяются из двух условий:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du}{dx}+P\,(x)\,u=0,\\ &u\,\frac{dz}{dx}=Q\,(x). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

2) При помощи интегрирующего множителя $\mu=e^{\int P\,(x)\,dx}$ — путем приведения к полному дифференциалу:

$$y=e^{-\int P\,(x)\,dx}\left[\int Q\,(x)\,e^{\int P\,(x)\,dx}\cdot dx+C\right]. \tag{20}$$

3) Если известно какое-либо частное решение $y_1\,(x)$ линейного уравнения, то

$$y=y_1\,(x)+Ce^{-\int P\,(x)\,dx}. \tag{21}$$

4) Если известны два линейно независимых частных решения $y_1\,(x)$ и $y_2\,(x)$ (т. е. решения, линейная комбинация которых $C_1y_1+C_2y_2$ ни при каких значениях C_1 и C_2, кроме $C_1=C_2=0$, не обращается тождественно для всех значений x на данном интервале в нуль),
то

$$y=y_1+C\,(y_2-y_1). \tag{22}$$

§ 6. Уравнение Бернулли

Его вид:

$$y'+P\,(x)\cdot y=Q\,(x)\cdot y^n, \tag{23}$$

где n — постоянная, не равная 0 или 1.

Оно является уравнением, приводимым к линейному делением на y^n и введением новой переменной:

$$z=\frac{1}{y^{n-1}}=y^{-n+1}=y^{1-n}, \tag{24}$$

после чего решается как обычное линейное уравнение первого порядка относительно z. Окончательно обратной подстановкой получается общий интеграл:

$$y=e^{-\int P(x)\,dx}\left[C+(1-n)\int Q(x)\,e^{(1-n)\int P(x)\,dx}\cdot dx\right]^{\frac{1}{1-n}}. \tag{25}$$

§ 7. Уравнение Риккати *)

Его вид:

$$y'=P(x)\,y^2+Q(x)\cdot y+R(x). \tag{26}$$

В общем случае не интегрируется в квадратурах, т. е. нахождение его решения не может быть сведено к конечному числу последовательных интегрирований. Возможны следующие способы определения общего решения:

1) Если известно одно частное решение y_1 уравнения (26), то подстановка

$$y=y_1+\frac{1}{z}, \tag{27}$$

где z — новая переменная, приводит уравнение Риккати к линейному уравнению.

2) Если известны два решения y_1 и y_2, то $z_1=\dfrac{1}{y_2-y_1}$ будет частным решением линейного уравнения относительно z, что позволит упростить его интегрирование.

3) Если известны три частных решения y_1, y_2 и y_3, то общий интеграл будет:

$$\frac{y-y_2}{y-y_1}:\frac{y_3-y_2}{y_3-y_1}=C. \tag{28}$$

Уравнение Риккати заменой переменных $y=\dfrac{u}{P(x)}+\beta(x)$ сводится к более простому, каноническому виду:

$$\frac{du}{dx}=u^2+R(x), \tag{29}$$

что облегчает нахождение общего интеграла исходного уравнения.

§ 8. Уравнение Лагранжа

Это уравнение типа $x=\varphi(y, y')$ или $y=\psi(x, y')$, не разрешенное относительно производной искомой функции.

Его вид:

$$a(y')\,x+b(y')\,y+c(y')=0, \tag{30}$$

где $a(y')$, $b(y')$, $c(y')$ — функции y'.

Уравнение (30) интегрируется подстановкой:

$$y'=\frac{dy}{dx}=p. \tag{31}$$

---

*) Уравнения Риккати, Лагранжа, Клеро имеют преимущественное применение в решениях задач научно-исследовательского характера. Ввиду этого в данной книге не рассматриваются задачи этого типа, как выходящие за рамки программ techinstitutов.

Тогда, разрешая (30) относительно y, получаем:

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \tag{32}$$

Величина p рассматривается как вспомогательная переменная. Продифференцировав это уравнение по p, получим уравнение:

$$[p - \varphi(p)] \frac{dx}{dp} - \varphi'(p)\, x - \psi'(p) = 0,$$

линейное относительно x.

Общий интеграл уравнения:

$$x = e^{\int \frac{\varphi'(p)\, dp}{p - \varphi(p)}} \left[C + \int \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} e^{-\int \frac{\varphi'(p)\, dp}{p - \varphi(p)}} dp \right]. \tag{33}$$

Исключая из (33) и данного уравнения p, получаем общий интеграл уравнения (32).

§ 9. Уравнение Клеро

Его вид:

$$y = xp + \psi(p), \tag{34}$$

где

$$p = \frac{dy}{dx}.$$

Уравнение (34) является частным случаем уравнения Лагранжа.

Общий интеграл уравнения Клеро находится путем подстановки вместо p произвольной постоянной C, т. е.

$$y = Cx + \psi(C). \tag{35}$$

Особое решение * находится исключением p из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x + \psi'(p) &= 0, \\ y &= xp + \psi(p). \end{aligned}\right\}$$

---

* Особое решение есть такое решение, которое, не заключая в себе произвольной постоянной, не получается из общего интеграла при частном значении произвольной постоянной. Геометрически особое решение — огибающая семейства линий, изображаемых общим интегралом.

Глава 5

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Неполные дифференциальные уравнения второго порядка

Общий вид уравнения 2-го порядка:

$$F(x,\ y,\ y',\ y'')=0. \tag{1}$$

Разрешив его относительно второй производной (если это возможно), получим:

$$y''=f(x,\ y,\ y'). \tag{1a}$$

Наиболее часто встречаются в приложениях следующие пять специальных типов уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &y''=f(x),\\ &y''=f(y),\\ &y''=f(y'),\\ &y''=f(x,\ y'),\\ &y''=f(y,\ y'). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Уравнения (2) решаются методом понижения порядка уравнения, путем введения новой искомой функции:

$$p=\frac{dy}{dx}=y'. \tag{3}$$

Тогда

$$y''=\frac{dp}{dx}. \tag{4}$$

или (во втором и пятом случаях, при наличии y):

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p. \tag{4a}$$

Подстановка значений (3) и (4) или (4a) в уравнения (2) сводит их к уравнениям первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} dp&=f(x)\,dx,\\ pdp&=f(y)\,dy,\\ \frac{dp}{f(p)}&=dx,\\ dp&=f(x,\ p)\,dx,\\ pdp&=f(y,\ p)\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Общее решение уравнений (5) имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} p &= \varphi(x) + C \\ &\text{или:} \\ p &= \psi(y) + C. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Используя зависимость (3), получаем уравнение

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \varphi(x) + C \\ &\text{или:} \\ \frac{dy}{dx} &= \psi(y) + C. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Таким путем решения всех уравнений типов (2) сводятся к решениям уравнений первого порядка.

§ 2. Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Общий вид неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$A_1y'' + A_2y' + A_3y = f(x), \tag{8}$$

где

A_1, A_2, A_3 — постоянные вещественные коэффициенты;

$f(x)$ — некоторая данная функция x или (в частном случае) постоянное число.

При $f(x) \equiv 0$ уравнение принимает вид:

$$A_1y'' + A_2y' + A_3y = 0 \tag{9}$$

и называется однородным линейным уравнением.

а) Решение однородного уравнения

Если соответственно данному уравнению (9) составить алгебраическое уравнение вида:

$$A_1r^2 + A_2r + A_3 = 0, \tag{10}$$

то такое уравнение называется характеристическим по отношению к уравнению (9). Вид общего решения уравнения (9) зависит от рода корней характеристического уравнения (10).

Случай 1. Корни характеристического уравнения r_1 и r_2—действительные и разные числа.

Общее решение:

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}. \tag{11}$$

Случай 2. Корни уравнения (10) — кратные (равные) вещественные числа $r_1 = r_2 = r$.

Тогда

$$y = C_1e^{rx} + C_2xe^{rx}. \tag{12}$$

Случай 3. Корни характеристического уравнения — комплексные сопряженные числа: $r_{1,2} = a \pm bi$.

В этом случае общее решение:

$$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx). \tag{13}$$

Общее решение (13) может быть также представлено в эквивалентной тригонометрической форме:

$$y = Me^{ax} \sin(bx + \varphi), \tag{13a}$$

где M и φ — постоянные величины.

Итак, правило решения однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами формулируется так:

1) составить соответствующее характеристическое уравнение;
2) найти его корни;
3) составить соответствующие типу полученных корней общие решения.

б) Решение неоднородного уравнения

Общее решение неоднородного уравнения Y представляет собою сумму общего решения соответствующего однородного уравнения y и какого-либо одного частного решения неоднородного уравнения V:

$$Y=y+V.$$

Определение частного решения, зависящего от вида правой части уравнения (8) $f(x)$, в практически встречающихся случаях сводится к следующему:

Случай 1. Правая часть представляет многочлен вида

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m.$$

Тогда

$$V=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m. \tag{14}$$

Если характеристическое уравнение имеет корень, равный нулю кратности k ($k=1$, 2), то тогда

$$V=x^k(A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m). \tag{14a}$$

Случай 2. Правая часть представляет собой показательную функцию вида $f(x)=ae^{px}$, где a — постоянная величина или многочлен от x.

Тогда

$$V=Ae^{px}, \tag{15}$$

где A — соответственно константа или многочлен.

В случае если характеристическое уравнение имеет корень p кратности k ($k=1$, 2), то

$$V=Ax^ke^{px}. \tag{15a}$$

Случай 3. Правая часть имеет тригонометрический характер типа: $f(x)=a_1\sin bx+a_2\cos bx$.

Тогда

$$V=A_1\sin bx+A_2\cos bx. \tag{16}$$

Когда характеристическое уравнение имеет корни $\pm bi$ кратности k, то

$$V=x^k(A_1\sin bx+A_2\cos bx). \tag{16a}$$

Случай 4. Правая часть представляет собою комбинированный случай вида: $f(x)=e^{ax}(c_1\sin bx+c_2\cos bx)$.

Тогда

$$V=e^{ax}(C_1\sin bx+C_2\cos bx). \tag{17}$$

Здесь c_1, c_2 и соответственно C_1 и C_2 могут быть многочленами или постоянными величинами. В случае если характеристическое уравнение имеет корни $a+bi$ и $a-bi$ кратности k, то

$$V=x^ke^{ax}(C_1\sin bx+C_2\cos bx). \tag{17a}$$

Случай 5. Если правая часть $f(x)$ представляет сумму функций рассмотренных видов, то частное решение V равно сумме соответствующих функций.

Коэффициенты A, A_1, A_2, ..., A_m, C_1, C_2 являются коэффициентами или многочленами, подлежащими определению. Они должны определяться так, чтобы V действительно служило частным решением уравнения (8).

После подстановки V в уравнение (8) это уравнение должно представлять тождество, из которого сравнением коэффициентов подобных членов обеих его частей определяются искомые коэффициенты или многочлены (задавшись предварительно их полной формой). Сумма $y+V$ равна общему решению неоднородного уравнения Y.

§ 3. Линейные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

а. Уравнение Эйлера

1. Уравнением Эйлера второго порядка называется уравнение вида:

$$a_0x^2y'' + a_1xy' + a_2y = \begin{cases} f(x) \\ 0, \end{cases} \text{ или} \tag{18}$$

где a_0, a_1, a_2 — постоянные.

Оно может быть однородным и неоднородным.

Подстановкой $x = e^t$ это уравнение приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами. При этом

$$y' = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{x'_t} = \frac{1}{e^t}\cdot\frac{dy}{dt},$$

а $$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{e^t}\frac{dy}{dt}\right)}{d(e^t)} = \frac{\frac{1}{e^t}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{e^t}\frac{dy}{dt}}{e^t} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}}{e^{2t}}.$$

2. Уравнение вида

$$A_0(ax+b)^2y'' + A_1(ax+b)y' + A_2y = f(x), \tag{19}$$

где A_0, A_1, A_2, a и b — постоянные коэффициенты, приводится к уравнению с постоянными коэффициентами подстановкой

$$ax + b = e^t.$$

б. Линейное однородное уравнение

Вид уравнения:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{20}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — функции x.

Его общее решение:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2, \tag{21}$$

где y_1 и y_2 — частные линейно независимые решения уравнения (20).

Если известно одно решение, то можно легко определить второе по формуле:

$$y_2 = Ay_1\int e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)\,dx}\cdot\frac{dx}{y_1^2}, \tag{22}$$

где A — произвольное постоянное.

в. Линейное неоднородное уравнение

Вид уравнения:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{23}$$

Здесь p, q, $f(x)$ — непрерывные функции.

Общий интеграл имеет вид:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + V, \tag{24}$$

где y_1 и y_2 — линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения;

V — частное решение неоднородного уравнения.

Частное решение V находится способом Лагранжа (метод вариаций произвольных постоянных).

Этот метод дает возможность проинтегрировать неоднородное линейное уравнение, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения $y=C_1y_1+C_2y_2$, считая при этом C_1 и C_2 уже не постоянными, а новыми неизвестными функциями $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

Метод разыскания частного решения V состоит в том, что C_1 и C_2 определяются таким путем, чтобы искомое решение

$$V=C_1y_1+C_2y_2. \tag{25}$$

Тогда

$$\frac{dV}{dx}=(C_1'y_1+C_2'y_2)+(C_1y_1'+C_2y_2') \tag{26}$$

и

$$\frac{d^2V}{dx^2}=(C_1''y_1+C_2''y_2)+2(C_1'y_1'+C_2'y_2')+(C_1y_1''+C_2y_2''). \tag{27}$$

Предполагаем, что C_1' и C_2' удовлетворяют системе двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} C_1'y_1+C_2'y_2&=0,\\ C_1'y_1'+C_2'y_2'&=f(x).\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Дифференцируя первое уравнение системы (28), получаем:

$$(C_1''y_1+C_2''y_2)+(C_1'y_1'+C_2'y_2')=0. \tag{29}$$

Тогда уравнения (25) — (27) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} V&=C_1y_1+C_2y_2,\\ \frac{dV}{dx}&=C_1y_1'+C_2y_2',\\ \frac{d^2V}{dx^2}&=C_1y_1''+C_2y_2''+f(x).\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Умножив первое уравнение (30) на $q(x)$, второе на $p(x)$, третье на 1 и сложив почленно, получаем:

$$\frac{d^2V}{dx^2}+p(x)\frac{dV}{dx}+q(x)V=f(x), \tag{31}$$

так как ввиду того, что y_1 и y_2 — решения однородного уравнения, то

$$y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1=0$$

и

$$y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2=0.$$

Решая систему (28), находим:

$$\left.\begin{aligned} C_1'&=-\frac{f(x)}{y_1\left(\ln\dfrac{y_2}{y_1}\right)'},\\ C_2'&=\frac{f(x)}{y_2\left(\ln\dfrac{y_2}{y_1}\right)'}.\end{aligned}\right. \tag{32}$$

Интегрируя, получаем:

$$C_1=C_1(x) \quad \text{и} \quad C_2=C_2(x).$$

§ 4. Интегрирование уравнений второго порядка с помощью рядов

Этот прием применяется, когда трудно найти общее решение дифференциального уравнения.

а) Метод неопределенных коэффициентов

В уравнении

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$$

$p(x)$ и $q(x)$ раскладываются в степенные ряды вида:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \quad \text{и} \quad q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i. \tag{33}$$

Решение определяется в форме:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i. \tag{34}$$

Коэффициенты c_i находятся способом неопределенных коэффициентов; подставляя значения y, y' и y'' в уравнение и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем уравнения для c_i:

$$\begin{array}{l|l}
x^0 & 2\cdot 1c_2 + a_0c_1 + b_0c_0 = 0. \\
x^1 & 3\cdot 2c_3 + 2a_0c_2 + a_1c_1 + b_0c_1 + b_1c_0 = 0, \\
x^2 & 4\cdot 3c_4 + 3a_0c_3 + 2a_1c_2 + a_2c_1 + b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0 = 0, \\
\multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}$$

Чтобы получить два частных решения y_1 и y_2, принимаем для $y_1 - c_0 = 1$ $c_1 = 0$, для $y_2 - c_0 = 0$ $c_1 = 1$.

После определения c_i необходимо удостовериться в сходимости полученного ряда.

б) Метод разложения в ряд Тейлора или Маклорена

Решение уравнения

$$y'' = f(x,\ y,\ y') \tag{35}$$

можно искать в виде ряда Тейлора и Маклорена, если задать для него начальные условия и если ряд при этом получается сходящимся.

Пусть начальные условия

$$\begin{array}{lll}
\text{при} & x = a, & y = b; \\
\text{»} & x = a, & y' = b_1; \\
\text{»} & x = a, & y'' = b_2.
\end{array}$$

В таком случае общее решение уравнения представится так:

$$y = b + b_1\frac{x-a}{1!} + b_2\frac{(x-a)^2}{2!} + y'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + {}$$
$$+ y''''(a)\frac{(x-a)^4}{4!} + \dots \tag{36}$$

Значения $y'''(a)$, $y''''(a)$ находятся из заданного дифференциального уравнения и из уравнений, полученных из него дифференцированием, подстановкой в них заданных постоянных a, b_1, b_2 вместо x, y, y', y''.

Примечание. Ряд Тейлора:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^n(a) + \dots$$

Ряд Маклорена представляет собою частный случай ряда Тейлора, когда разложение функции $f(x)$ по степеням x производится при $a = 0$, т. е.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \dots$$

§ 5. Некоторые специальные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами *

Решения нижеизложенных специальных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами основываются на принципе интегрирования уравнений с помощью рядов.

А. Уравнение Бесселя

Его вид:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \tag{37}$$

или

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0, \tag{37 a}$$

где n — любое число.

Известно, что для уравнения типа $x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$, если функции $p(x)$ и $q(x)$ разлагаются в сходящиеся ряды по степеням x, то методом неопределенных коэффициентов могут быть найдены решения вида: $y = x^r(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)$. Значения показателя r находятся из характеристического уравнения:

$$r(r-1) + p(0)\cdot r + q(0) = 0. \tag{38}$$

Для уравнения (37 a) характеристическое уравнение:

$$r(r-1) + r - n^2 \equiv r^2 - n^2 = 0, \tag{38 a}$$

откуда

$$r = \pm n.$$

Подставляя

$$y = x^n(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)$$

в уравнение и приравнивая нулю коэффициент при x^{n+k}, находим:

$$k(2n+k)a_k + a_{k-2} = 0. \tag{39}$$

При $k = 1$, получим:

$$(2n+1)a_1 = 0. \tag{40}$$

$$a_{2m+1} = 0 \quad (m = 1,2,3 \ldots);$$

Придавая k значения 2, 3, 4, ... , имеем:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2n+2)};$$

$$a_4 = \frac{a_0}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

причем a_0 — произвольно.

Полученный сходящийся ряд при $a_0 = \dfrac{1}{2^n\Gamma(n+1)}$ ** определяет цилиндрическую функцию (функцию Бесселя) n-го порядка 1-го рода:

---

* Этот вид дифференциальных уравнений не входит по программе в курс высшей математики для techинститутов и втузов. Однако, учитывая их органическую вытекаемость из интегрирования дифференциальных уравнений при помощи рядов, а также обширные применения этих уравнений в технических вопросах, автором они включены в сводку. Этот раздел может быть пропущен.

** Понятие факториала распространяется на любые числа x (в том числе и на комплексные) при помощи гамма-функции $\Gamma(x)$, определяемой двояким образом:

$$J_n(x)=\frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left(1-\frac{x^2}{2(2n+2)}+\frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)}-\dots\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,\Gamma(n+k+1)}, \tag{41}$$

которая является решением уравнения (37a). Здесь $|x|<\infty$.

Решение уравнения Бесселя вместо равенства (41) может быть представлено также функцией Бесселя в виде.

$$J_n(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Pi(n+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \tag{42}$$

причем

$$\Pi(n+k)=\Gamma(n+k+1)=\Pi(n)(n+1)(n+2)\dots(n+k).$$

Общее решение уравнения Бесселя при n **не равном целому числу** имеет вид:

$$y=C_1J_n(x)+C_2J_{-n}(x), \tag{43}$$

где $J_{-n}(x)$ определяется рядом, получающимся из приведенного выше ряда для $J_n(x)$ заменой n на $-n$.

При n **целом**

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x), \tag{44}$$

$$\text{при } n=\frac{1}{2}:\quad J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x;$$
$$\text{при } n=-\frac{1}{2}:\quad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \tag{44a}$$

В этом случае функции J_n и J_{-n} — линейно зависимые и их линейная комбинация (43) уже не является общим решением уравнения (37a).

В общем решении в этом случае $J_{-n}(x)$ должна быть заменена бесселевой функцией 2-го ряда $Y_n(x)$, называемой функцией Вебера (или Неймана) и определяемой равенством:

$$Y_n(x)=\lim_{m\to n}\frac{J_m(x)\cos m\pi-J_{-m}(x)}{\sin m\pi}.$$

При помощи этих функций общее решение уравнения Бесселя может быть записано в виде:

$$y=C_1J_n(x)+C_2Y_n(x)$$

как при целом, так и не при целом n).

$$\Gamma(x)\begin{cases}=\int_0^{\infty}e^{-t}\cdot t^{x-1}\cdot dt \text{ (интеграл Эйлера) (только при } x>0)\\[2ex] =\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!\,n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)} \text{ (для любых } x)\end{cases}$$

Основные свойства гамма-функции:

$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$,

$\Gamma(n)=(n-1)!$ при целом положительном n.

Понятие факториала $n!$, определенное сначала для целых положительных n, обобщается для любого действительного n в виде функций $\Pi(x)=\Gamma(x+1)$.

При целом положительном x: $\Pi(x)=x!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot x$, при $x=0$: $\Pi(0)=\Gamma(1)=1$.

Б. Уравнение Лежандра

Его вид

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0, \tag{45}$$

где n — целое положительное число ($n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k$).

Одним из решений уравнения (45) является сходящийся ряд, называемый полиномом Лежандра или шаровой функцией:

$$P_n(x)=\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{n!}\left(x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-\ldots+\ldots\right)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}. \tag{46}$$

Фундаментальная система решений (45):

$$y_1=P_n(x),$$
$$y_2=Q_n(x)=\frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{x+1}{x-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}P_{k-1}(x)P_{n-k}(x).$$

$Q_n(x)$ называется функцией Лежандра второго ряда.

Тогда общее решение уравнения Лежандра:

$$y=C_1P_n(x)+C_2Q_n(x). \tag{47}$$

Основные свойства полиномов Лежандра следующие:

1) $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$;

2) $P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\dfrac{1}{2}(3x^2-1),$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),\quad P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),$$
$$P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x),\quad P_6(x)=\frac{1}{16}(231x^6-$$
$$-315x^4+105x^2-5);$$

3) $nP_n(x)=(2n-1)xP_{n-1}(x)-(n-1)P_{n-2}(x)$;

4) $P_n(x)$ имеет n нулевых точек, расположенных между $+1$ и -1;

5) $\displaystyle\int_{-1}^{+1}P_m(x)P_n(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{при } n\neq m,\\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{при } n=m;\end{cases}$

6) $\displaystyle\sqrt{\frac{1}{1-2rx+r^2}}=\sum_{i=0}^{\infty}P_i(x)r^i,\quad |r|<1.$

В. Уравнение Матье

Его вид:

$$y''+(\lambda-2h\cos 2x)y=0. \tag{48}$$

Решение уравнения существует всегда при условии

$$y(x+\pi)=e^{\mu\pi}y(x), \tag{49}$$

где μ — т. н. характеристическая экспонента.

Если $y_1(x)$ — решение уравнения Матье, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_1(0)=1,\quad y_1(\pi)=0,$$

то параметр μ вычисляется по формуле:

$$\operatorname{ch}(\mu\pi) = y_1(\pi).$$

При малых значениях коэффициента h применяется следующая приближенная формула:

$$y_1(\pi) \approx \cos\pi\sqrt{\lambda} + h^2 \frac{\pi\sqrt{\lambda}\sin\pi\sqrt{\lambda}}{4\lambda(\lambda-1)} +$$

$$+ h^4 \frac{(15\lambda^2 - 35\lambda + 8)\pi\sqrt{\lambda}\sin\pi\sqrt{\lambda} - 2\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)\pi^2\cos\pi\sqrt{\lambda}}{64\lambda^2(\lambda-1)^3(\lambda-4)}.$$

В случае $y_1(\pi) \neq \pm 1$. т. е. $\mu \neq in$ $(n = 0, \ \pm 1; \ \pm 2 \ldots)$ общее решение уравнения Матье:

$$y = C_1 e^{\mu x} p(x) + C_2 e^{-\mu x} p(-x), \tag{50}$$

где $p(x)$ — периодическая функция периода π.

Ее коэффициенты Фурье могут быть определены из дифференциального уравнения. Если $y_1(\pi) = \pm 1$, общее решение уравнения Матье:

$$y = C_1 p_1(x) + C_2 [x p_1(x) + p_2(x)], \tag{50a}$$

где $p_1(x)$ и $p_2(x)$ — периодические функции периода π [если $y_1(\pi) = +1$] или 2π [если $y_1(\pi) = -1$].

Решение $y(x)$ называется устойчивым, если $y(x)$ при $x \to \infty$ остается ограниченным; в противном случае решение неустойчивое.

При $|y_1(\pi)| < 1$ общее решение устойчиво, при $|y_1(\pi)| \geqslant 1$ существуют неустойчивые частные решения.

Глава 6

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

§ 1. Однородные уравнения с постоянными коэффициентами

К этому типу относятся уравнения вида:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0, \tag{1}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — постоянные величины.

Для нахождения общего решения этого уравнения следует предварительно решить характеристическое уравнение:

$$r^n+a_1r^{n-1}+a_2r^{n-2}+\ldots+a_{n-1}r+a_n=0. \tag{2}$$

1. Если все корни этого уравнения $r_1, r_2, \ldots, r_n$ различны и вещественны, то общее решение будет иметь вид:

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}+\ldots+C_ne^{r_nx}, \tag{3}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

2. Если между корнями характеристического уравнения содержится k равных действительных корней $r_1=r_2=\ldots=r_k=r$, а остальные корни $r_{k+1}, r_{k+2}, \ldots, r_n$ — действительные, друг другу и r не равные, то общее решение будет иметь вид:

$$y=(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_kx^{k-1})\,e^{rx}+C_{k+1}e^{r_{k+1}x}+\ldots+C_ne^{r_nx}. \tag{4}$$

3. Если между корнями характеристического уравнения содержатся комплексные и различные, попарно-сопряженные $r_1=\alpha_1+\beta_1i$ и $r_2=\alpha_1-\beta_1i$, а остальные корни $r_3, r_4, \ldots, r_n$ — действительные и разные, то общее решение будет иметь вид:

$$\begin{gathered}y=e^{\alpha_1x}\,[(C_1+C_2)\cos\beta_1x+i\,(C_1-C_2)\sin\beta_1x]+\\+C_3e^{r_3x}+C_4e^{r_4x}+\ldots+C_ne^{r_nx}=e^{\alpha_1x}\,[C_1^*\cos\beta_1x+C_2^*\sin\beta_1x]+C_3e^{r_3x}+\\+C_4e^{r_4x}+\ldots+C_ne^{r_nx}.\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $C_1^*=C_1+C_2$; $C_2^*=i\,(C_1-C_2)$.

4. Если между корнями характеристического уравнения будут содержаться комплексные и равные, попарно-сопряженные, например $r_1=\alpha_1+\beta_1i$, а также $r_2=\alpha_1-\beta_1i$ будут k-кратными, то часть общего решения, соответствующая этим корням, будет иметь вид:

$$\begin{gathered}y^*=e^{\alpha_1x}\,\{(C_1+C_2x+\ldots+C_kx^{k-1})\cos\beta_1x+\\+(C_{k+1}+C_{k+2}x+\ldots+C_{2k}x^{k-1})\sin\beta_1x\}.\end{gathered} \tag{6}$$

§ 2. Неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

К этому типу относятся уравнения вида:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_n=f(x), \tag{7}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — постоянные, а $f(x)$ — функция x. Для получения общего решения этого уравнения применяют два метода.

1. Метод Лагранжа (вариации произвольных постоянных)

Общий интеграл рассматриваемого уравнения будет иметь вид:

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n, \tag{8}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — известные решения соответствующего однородного уравнения, а $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — функции x, которые определяются системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dC_1}{dx}y_1+\frac{dC_2}{dx}y_2+\ldots+\frac{dC_n}{dx}y_n=0,\\
&\frac{dC_1}{dx}\frac{dy_1}{dx}+\frac{dC_2}{dx}\frac{dy_2}{dx}+\ldots+\frac{dC_n}{dx}\frac{dy_n}{dx}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dC_1}{dx}\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}+\frac{dC_2}{dx}\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}+\ldots+\frac{dC_n}{dx}\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}=f(x).
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Решая эту систему, получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dC_1}{dx}=f_1(x),\\
&\frac{dC_2}{dx}=f_2(x),\\
&\ldots\ldots\\
&\frac{dC_n}{dx}=f_n(x),
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}
&C_1=\int f_1(x)\,dx+A_1,\\
&C_2=\int f_2(x)\,dx+A_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_n=\int f_n(x)\,dx+A_n.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

2. Метод неопределенных коэффициентов

Как известно, для получения общего интеграла неоднородного уравнения достаточно к частному его интегралу прибавить общий интеграл соответствующего однородного уравнения. Нахождение частного интеграла может быть упрощено методом неопределенных коэффициентов в следующих случаях:

а) когда последний член вида $f(x)=e^{\alpha x}\cdot\varphi(x)$,
где α — постоянное число,
$\varphi(x)$ — целая функция m-ой степени.

Тогда частное решение y_0 такого уравнения имеет вид:

$$y_0=e^{\alpha x}x^k(A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m), \tag{12}$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m$ — неопределенные коэффициенты, которые следует найти, а k — порядок кратности корня α для характеристического уравнения.

Если α не является корнем характеристического уравнения, то $k=0$.

б) когда последний член вида:

$$f(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x\varphi(x)$$

или

$$f(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x\varphi(x),$$

где α и β — постоянные числа,

$\varphi(x)$ — целая функция m-ой степени.

Частное решение y_0 такого уравнения имеет вид:

$$y_0=e^{\alpha x}\cdot x^k[(A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m)\cos\beta x+ \\ +(B_0x^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_m)\sin\beta x], \tag{13}$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_m$ и $B_0, B_1, \ldots, B_m$ — неопределенные коэффициенты, которые следует найти, а k — порядок кратности корня $\alpha\pm\beta i$ для характеристического уравнения. Если $\alpha\pm\beta i$ не является корнем характеристического уравнения, то $k=0$.

§ 3. Уравнения с переменными коэффициентами

К этому типу относятся уравнения вида:

$$y^{(n)}+f_1(x)y^{(n-1)}+f_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+f_n(x)y=\varphi(x). \tag{14}$$

Общего метода решения таких уравнений нет.

В некоторых случаях эти уравнения могут быть преобразованы при помощи удачно выбранной подстановки к другим уравнениям, которые в свою очередь могут быть интегрируемы.

В частном случае, если уравнение имеет вид:

$$(ax+b)^ny^{(n)}+a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}+a_2(ax+b)^{n-2}\cdot y^{(n-2)}+ \\ +\ldots+a_{n-1}(ax+b)y'+a_ny=\varphi(x), \tag{15}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a и b — постоянные, вводят подстановку:

$$ax+b=e^t.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx}=ae^{-t}\frac{dy}{dt}, \\ &\frac{d^2y}{dx^2}=a^2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right), \\ &\frac{d^3y}{dx^3}=a^3e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Подставляя эти выражения в данное уравнение, получим линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

§ 4. Уравнения высших порядков частных видов

А. Уравнения вида $\dfrac{d^ny}{dx^n}=f(x)$. (17)

Общий интеграл такого уравнения находится n последовательными интегрированиями:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\int f(x)\,dx+C_1,\\
&\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=\iint f(x)\,dx^2+C_1x+C_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y=\underbrace{\iint\dots\int}_{n\ \text{раз}} f(x)\,dx^n+\frac{C_1x^{n-1}}{(n-1)!}+\dots+C_{n-1}x+C_n.
\end{aligned}\right\}\qquad(18)$$

Б. Уравнения вида $f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},\ \frac{d^ny}{dx^n}\right)$.

Вводя новую функцию

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=z,\qquad(19)$$

получаем уравнение первого порядка:

$$f\left(z,\ \frac{dz}{dx}\right)=0.\qquad(20)$$

Если, интегрируя это уравнение, получим его общий интеграл в виде

$$z=\varphi(x,\ C_1),$$

то, заменяя z через

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

приведем уравнение к виду A.

В. Уравнения вида $f\left(\frac{d^ny}{dx^n},\ \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)=0.$

Решая это уравнение относительно $\frac{d^ny}{dx^n}$, находим:

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\varphi\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right).\qquad(21)$$

Применяя подстановку $z=\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$, получаем:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\varphi(z).\qquad(22)$$

Полагая еще

$$\frac{dz}{dx}=p,$$

получим:

$$\frac{dp}{dx}=\varphi(z),\qquad(23)$$

откуда

$$dp=\varphi(z)\,dx=\frac{\varphi(z)\,dz}{p}.$$

Тогда

$$2pdp=2\varphi(z)\,dz,$$

и, следовательно,

$$p^2=2\int\varphi(z)\,dz+C_1,$$

откуда

$$p=\frac{dz}{dx}=\sqrt{2\int\varphi(z)\,dz+C_1}, \tag{24}$$

$$x=\int\frac{dz}{\sqrt{2\int\varphi(z)\,dz+C_1}}+C_2. \tag{25}$$

Г. Уравнения вида $f\left(x,\ \frac{d^ky}{dx^k},\ \frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}},\ \ldots,\ \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0.$

Эти уравнения допускают понижение порядка на k единиц, если ввести новую функцию z, положив $\frac{d^ky}{dx^k}=z$.

В частном случае уравнение $f\left(x,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$ при помощи подстановки $\frac{dy}{dx}=p$ приводится к уравнению первого порядка: $f\left(x,\ p,\ \frac{dp}{dx}\right)=0.$

Д. Уравнения вида $f\left(y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots,\ \frac{d^ny}{dy^n}\right)=0.$

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу, если принять за новую независимую переменную y, а за новую функцию $p=\frac{dy}{dx}$. Тогда

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2y}{dx^2}=p\,\frac{dp}{dy},\\ \frac{d^3y}{dx^3}=p^2\,\frac{d^2p}{dy^2}+p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} \tag{26}$$

Преобразованное уравнение будет иметь вид:

$$\varphi\left(y\quad p,\ \frac{dp}{dy},\ \ldots,\ \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right)=0. \tag{27}$$

В частном случае уравнение

$$f\left(y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$$

приводится к уравнению первого порядка:

$$\varphi\left(y,\ p,\ \frac{dp}{dy}\right)=0.$$

Е. Уравнения однородные относительно

$$y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots,\ \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Такие уравнения приводятся к уравнению (n-1)-го порядка введением новой функции $z=\frac{y'}{y}$. Это делается при помощи подстановки:

$$\left.\begin{array}{l}y'=yz,\\ y''=y\,(z^2+z'),\\ y'''=y\,(z^3+3zz'+z''),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} \tag{28}$$

Найдя общий интеграл преобразованного уравнения, следует подставить вместо z его значение в уравнение $z=\frac{y'}{y}$ и еще раз проинтегрировать. Тогда получится общий интеграл данного уравнения.

Ж. Уравнения однородные относительно

$$x,\ y,\ dx,\ dy,\ d^2y,\ \ldots,\ d^ny.$$

Такие уравнения при помощи подстановок

$$x=e^t, \qquad y=e^tz$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx}=z+\frac{dz}{dt}, \\ &\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-t}\left(\frac{dz}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

приводятся к уравнению вида:

$$f\left(y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots,\ \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0, \tag{30}$$

которые уже рассмотрены в разделе Е.

Глава 7

СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Непосредственный способ (интегрируемые комбинации)

Непосредственный метод интегрирования сводится к образованию посредством сложения, вычитания, деления данных уравнений интегрируемых комбинаций, т. е. уравнений вида:

$$\varphi\left(t,\ U,\ \frac{dU}{dt}\right)=0; \tag{1}$$

здесь U — некоторая функция от искомых функций, не содержащая t. В случае линейной однородной системы с постоянными коэффициентами интегрируемая комбинация есть уравнение с разделенными переменными, в случае неоднородной линейной системы — линейное уравнение первого порядка. Каждая интегрируемая комбинация дает один первый интеграл; если число их равно числу уравнений системы, интегрирование закончено; в противном случае получается система с меньшим числом неизвестных функций.

§ 2. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

Существуют различные способы интегрирования таких систем. Проше всего пользоваться методом Даламбера, который вытекает из непосредственного интегрирования.

А. Система двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=a_1x+b_1y+F_1(t), \\ \frac{dy}{dt}&=a_2x+b_2y+F_2(t). \end{aligned}\right\}$$

Обозначим через λ множитель, на который надо умножить второе уравнение, чтобы получить интегрируемую комбинацию

$$\frac{d(x+\lambda y)}{dt}=(a_1+a_2\lambda)\,x+(b_1+b_2\lambda)\,y+F_1+\lambda F_2.$$

Цель достигнута, если

$$b_1+b_2\lambda=\lambda\,(a_1+a_2\lambda),$$

или

$$a_2\lambda^2+(a_1-b_2)\,\lambda-b_1=0. \tag{3}$$

Тогда имеем интегрируемую комбинацию ($U=x+\lambda y$):

$$\frac{dU}{(a_1+a_2\lambda)\,U+F_1+\lambda F_2}=dt \text{ (линейное уравнение).} \tag{4}$$

Пусть общий интеграл уравнения (4) есть

$$U = x + \lambda y = \Phi(t, \lambda, C). \tag{5}$$

Различают три случая:

1) корни квадратного уравнения (3) вещественные и неравные. Тогда имеем два интеграла системы (2):

$$\begin{aligned} x + \lambda_1 y &= \Phi(t, \lambda, C_1), \\ x + \lambda_2 y &= \Phi(t, \lambda, C_2); \end{aligned} \tag{6}$$

2) корни комплексные, $\lambda = \alpha \pm \beta i$.

Приравнивая вещественные компоненты, а также мнимые обеих частей уравнения

$$x + (\alpha + \beta i)\, y = \Phi(t, \alpha + \beta i, \quad A + Bi), \tag{7}$$

получим также два интеграла (A, B — произвольные постоянные).

3) Корни кратные, $\lambda_1 = \lambda_2$.

В этом случае получаем только один интеграл, который позволяет свести вопрос к интегрированию одного линейного уравнения с одной неизвестной функцией.

Б. Система трех уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + F_1(t), \\ \frac{dy}{dt} &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + F_2(t), \\ \frac{dz}{dt} &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + F_3(t). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Умножаем второе уравнение на λ, третье на μ и затем складываем; получим:

$$\begin{aligned} \frac{d(x + \lambda y + \mu z)}{dt} = (a_1 + a_2\lambda + a_3\mu)\, x + (b_1 + b_2\lambda + b_3\mu)\, y + \\ + (c_1 + c_2\lambda + c_3\mu)\, z + F_1 + \lambda F_2 + \mu F_3. \end{aligned}$$

Подберем теперь λ и μ так, чтобы имели место равенства:

$$\left.\begin{aligned} b_1 + b_2\lambda + b_3\mu &= (a_1 + a_2\lambda + a_3\mu)\, \lambda, \\ c_1 + c_2\lambda + c_3\mu &= (a_1 + a_2\lambda + a_3\mu)\, \mu. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Вводим подстановку $U = x + \lambda y + \mu z$. Находим линейное уравнение:

$$\frac{dU}{(a_1 + a_2\lambda + a_3\mu)\, U + (F_2 + \lambda F_2 + \mu F_3)} = dt. \tag{10}$$

Пусть его общее решение

$$U = \Phi(t, \lambda, \mu, C). \tag{11}$$

Определяем λ и μ. Запишем систему (9) в виде

$$\frac{a_1 + a_2\lambda + a_3\mu}{1} = \frac{b_1 + b_2\lambda + b_3\mu}{\lambda} = \frac{c_1 + c_2\lambda + c_3\mu}{\mu} = s. \tag{12}$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} a_2\lambda + a_3\mu &= s - a_1, \\ (b_2 - s)\, \lambda + b_3\mu &= -b_1, \\ c_2\lambda + (c_3 - s)\, \mu &= -c_1. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Условие совместности системы (13):

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_1 - s \\ b_2 - s & b_3 & b_1 \\ c_2 & c_3 - s & c_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

— кубическое уравнение относительно s.

Различают три случая:

1) среди корней уравнения (14) нет равных, $s_1 \neq s_2 \neq s_3$. Определив для каждого корня из системы (13) соответственные значения для λ и μ (т. е. λ_1, μ_1; λ_2, μ_2; λ_3, μ_3), из уравнения (11) получаем все три интеграла;

2) среди корней есть двукратный; тогда найдем лишь два интеграла системы. Для окончания потребуется еще интеграция одного уравнения;

3) корень трехкратный; тогда найдем лишь один интеграл, а поэтому интегрирование будет сведено к системе двух уравнений. В случае комплексного корня поступают аналогично разделу А этого параграфа.

§ 3. Системы, содержащие производные выше первого порядка

Метод Даламбера (§ 2) применяется без изменений к линейным системам, уравнения которых содержат производные одного и того же порядка.

Решение любой системы, содержащей производные любых порядков, можно свести к решению дифференциальных уравнений первого порядка, вводя новые неизвестные функции.

Пусть

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= f_1\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= f_2\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= f_3\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Вводя новые неизвестные функции

$$x' = \frac{dx}{dt}; \qquad y' = \frac{dy}{dt}; \qquad z' = \frac{dz}{dt},$$

система (15) заменяется нижеследующей:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x', \\ \frac{dy}{dt} &= y', \\ \frac{dz}{dt} &= z', \\ \frac{dx'}{dt} &= f_1(t, x, y, z, x', y', z'), \\ \frac{dy'}{dt} &= f_2(t, x, y, z, x', y', z'), \\ \frac{dz'}{dt} &= f_3(t, x, y, z, x', y', z'), \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где t — аргумент, x, y, z, x', y', z' — искомые функции.

Система (16) состоит уже из шести уравнений первого порядка с шестью неизвестными функциями: x, y, z, x', y', z'.

Система (16), разрешенная относительно всех входящих в нее производных, называется нормальной. Решить систему (16) — значит найти систему уравнений вида:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(t, x, y, z, x', y', z', C_1, C_2, C_3, \ldots, C_6) = 0, \\ F_2(t, x, y, z, x', y', z', C_1, C_2, C_3, \ldots, C_6) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_6(t, x, y, z, x', y', z', C_1, C_2, C_3, \ldots, C_6) = 0, \end{array}\right\} \quad (17)$$

обладающую следующими двумя свойствами:

1) функции x, y, z, x', y', z', определяемые системой (17), должны удовлетворять системе (16),

2) систему (17) можно разрешить относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_6$, т. е. все эти постоянные не могут быть исключены из системы.

Разрешая систему (17) относительно произвольных постоянных, получим:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = \varphi_1(t, x, y, z, x', y', z'), \\ C_2 = \varphi_2(t, x, y, z, x', y', z'), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_6 = \varphi_6(t, x, y, z, x', y' z'). \end{array}\right\} \quad (18)$$

Функции

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(t, x, y, z, x', y', z'), \\ \varphi_2(t, x, y, z, x', y', z'), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_6(t, x, y, z, x', y', z') \end{array}\right\} \quad (19)$$

называются интегралами системы.

Если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_6$ — интегралы системы (16), то и произвольная функция $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_6)$ от этих интегралов будет также интегралом системы, так как

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_6) = F(C_1, C_2, \ldots, C_6) = C.$$

Таким образом, система имеет бесчисленное множество интегралов. Среди них независимых интегралов системы (16) будет только 6, где $n = 6$ — число уравнений первого порядка, составляющих систему.

Независимыми интегралами называются такие интегралы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_6$, между которыми не может существовать никакого тождественного соотношения вида $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_6) = 0$, т. е. ни один из них не является функцией остальных.

Имея систему общих интегральных уравнений (17), или систему независимых интегралов (18) и разрешая одну из них относительно искомых функций, получим систему общих решений системы в виде:

$$\left.\begin{array}{r} x = \psi_1(t, C_1, C_2, \ldots, C_6), \\ y = \psi_2(t, C_1, C_2, \ldots, C_6), \\ z = \psi_3(t, C_1, C_2, \ldots, C_6), \\ x' = \psi_4(t, C_1, C_2, \ldots, C_6), \\ y' = \psi_5(t, C_1, C_2, \ldots, C_6), \\ z' = \psi_6(t, C_1, C_2, \ldots, C_6). \end{array}\right\} \quad (20)$$

Таким образом, решение системы уравнений (16) сводится к определению одной из систем уравнений (17), (18) или (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. Берг Н. В., Фридолин И. П., Интегрирование дифференциальных уравнений, Баку, 1933.
2. Берман Г. Н., Сборник задач по курсу математического анализа, М., 1957.
3. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А., Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов, М., 1956.
4. Воронков И. М., Курс теоретической механики, М., 1955.
5. Высшая математика (методические указания и контрольные задания для студентов заочных высших технических заведений), изд. III, V, VII, IX; М., 1952—1958.
6. Горт В., Дифференциальные уравнения, Л.—М., ОНТИ, 1933.
7. Гребенча М. К., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., Учпедгиз, 1937.
8. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О., Сборник задач по высшей математике, т. II, М., 1951.
9. Креер Л. И., Сборник упражнений по дифференциальным уравнениям, М., Учпедгиз, 1940.
10. Люш В. В., Методические упражнения по интегрированию дифференциальных уравнений, Л., 1931.
11. Матвеев Н. М., Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, Л., 1955.
12. Месяцев П. П., Лившиц Н. С., Курс радиотехники, М., 1960.
13. Мещерский И. В., Сборник задач по теоретической механике, М., Гостехиздат, 1957.
14. Михельсон Н. С., Краткий курс высшей математики, М., 1954.
15. Петров А. А., Сборник задач на составление обыкновенных дифференциальных уравнений, М., МИХМ, 1937.
16. Пискунов Н. С., Дифференциальное и интегральное исчисление, М., 1957.
17. Сикорский Ю. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложением их к некоторым техническим задачам, М.—Л., ОНТИ, 1940.
18. Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, изд. VII, М., Гостехиздат, 1958.
19. Толстов Г. П., Курс математического анализа. т. II, М., 1957.
20. Филипс Г., Дифференциальные уравнения, М., 1925 (I изд.), 1932 (II изд.), 1950 (III изд.).
21. Филипс Г., Интегральное исчисление, М., ОНТИ, 1933.
22. Эльсгольц Л. Э., Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., Гостехиздат, 1954.
23. F. Brzoska, W. Bartsch, Mathematische Formelsammlung, 2-te Auflage, Leipzig, 1956.
24. W. Hort, A. Thoma, Die Differentialgleichungen der Technik und Physik, 7-te Auflage, Leipzig, 1956.
25. Hütte des Ingenieurs Taschenbuch, 28-te Auflage, Band 1, Berlin, 1955.
26. M. Lindow, Gewöhnliche Differentialgleichungen, 3-te Auflage, Berlin, 1948.
27. I Quinet, Cours élémentaire de mathématiques supérieures, tome V, Les équations différentielles et leurs applications, Paris, 1956.
28. H. W. Reddick, D. E. Kiddey, Differential questions, 3rd edition, New York, 1956.

Данная книга рекомендована ученой комиссией по математике ГУВУЗа Министерства просвещения РСФСР в качестве учебного пособия для физико-математических факультетов педагогических институтов.

Кирилл Константинович Пономарев

Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач

Редактор *В. Г. Долгополов*

Художник *Л. М. Чернышев* Художественный редактор *Б. Л. Николаев.* Технический редактор *М. С. Дранникова.* Корректор *Г. С. Денисенко*

* * *

Сдано в набор 3/VIII 1961 г. Подписано к печати 29/X 1962 г.
$60 \times 90^1/_{16}$. Печ. л. 11,5. Уч.-изд. л. 8,86. Тираж 25 тыс. экз. А08671.

* * *

Учпедгиз Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

Отпечатано с матриц Первой Образцовой типографии имени А. А. Жданова Московского городского совнархоза типографией изд-ва «Уральский рабочий», Свердловск, проспект Ленина, 49. Заказ № 886.

Цена без переплета 27 к., переплет 15 к.